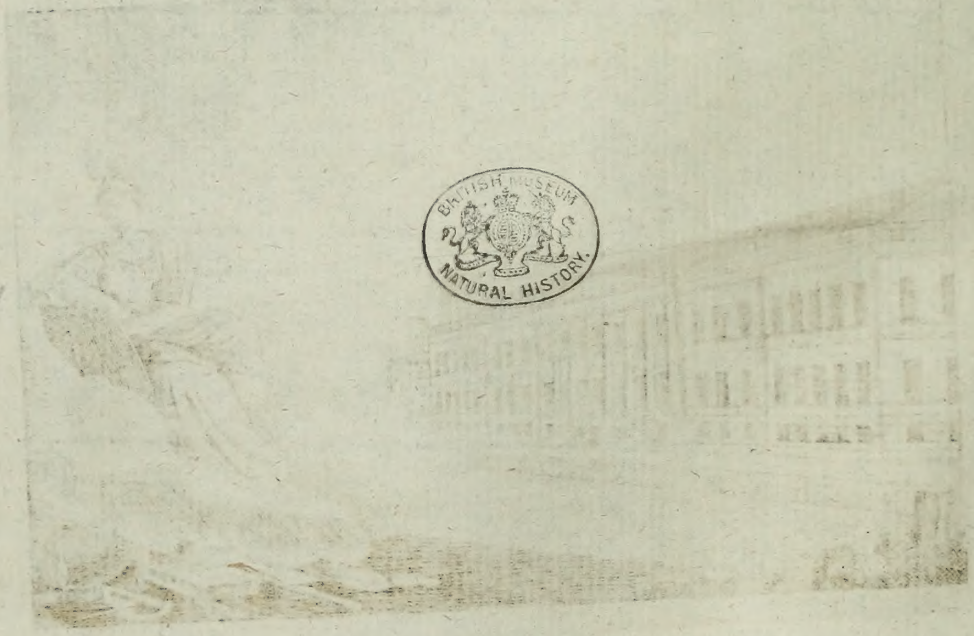
S. 1802. C. 61.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMUS XIV.

PRAECEDIT HISTORIA EIUSDEM ACADEMIAE
AD ANNOS MDCCXCVII et MDCCXCVIII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM. MDCCCV.



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

Corrigenda.

Histoire.

Pag.	131	lin.	6	loco	Asmund	lege	Asmundo
—	—	—	—	—	Rudolph	—	Rudolphi
—	—	—	8	—	Nostra	—	Nostri
—	148	—	24	—	fluidornm	—	fluidorum
—	152	—	2	—	essé	—	esse
—	—	—	22	—	ejusdam	—	ejusdem.

Acta.

Pag.	5	lin.	9	loco	x	lege	z
—	47	—	2	—	197	—	197^2
—	—	—	4	—	197	—	197^2
—	71	—	15	—	$V\,3$	—	$\sqrt[3]{V}$
—	76	—	24	—	apici	—	apice
—	252	—	9	—	residna	—	residua
—	341	—	11	—	cuis	—	cujus
—	369	—	8	—	Musaeo	—	Museo
—	372	—	5	—	extermis	—	externis.
—	466	—	13	—	28,25	—	29,25

TABLE DES MATIERES.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNEES MDCCXCVII et MDCCXCVIII.

Page

I. Evènemens mémorables :

I. Visite du Roi de Pologne. 3
II. Visite de LL. AA. SS. Mgrs les Princes de Würtemberg . 4

II. Changemens arrivés dans l'Académie :

I. Nomination d'un nouveau Président . . . 4
II. Membres décédés 5
III. Nomination de deux Académiciens à la place de Censeurs 8
IV. Nouvelles receptions 9
V. Promotions académiques et avancemens civils . . 11
VI. Gratifications, recompenses et distinctions littéraires . 12

III. Présens faits à l'Académie :

I. Pour la Bibliothèque 14
II. Pour le Cabinet de Minéralogie 20
III. Pour le jardin botanique 21
IV. Pour le Cabinet d'Histoire naturelle . . . ibid.
V. Pour le Médailler . . . . . ibid.

IV. Mémoires et autres ouvrages manuscrits présentés à l'Académie 22

V. Mémoires lus dans les Séances académiques . 26

Page

VI. Observations, expériences, et notices intéressantes, faites et communiquées à l'Académie :

I. Amalgamation du platine et dépuration du phosphore . 31
II. Décomposition de l'acide carbonique par la voye humide . 32
III. Production de cinabre par la voye humide . . . ibid.
IV. Phénomène d'Optique remarquable 33
V. Crystallisation métallique du platine 34
VI. Crystallisation curieuse de l'Hématite compacte de Kamensk' 38
VII. Pierre calcaire phosphorique des environs de Sanara et de Catherinebourg 40
VIII. Crystallisation métallique du cuivre 41
IX. Découverte du Chromium dans un fossile de Sibérie . 42
X. Crystallisations métalliques obtenues du phosphate de cuivre ibid.
XI. Méthode très simple d'obtenir l'huile d'oeuf . . 43
XII. Tremblement de terre 44
XIII. Titanium trouvé dans un minerais des monts Ourals en Sibérie ibid.
XIV. Crystallisation de l'acide phosphorique parfaitement dépuré . 45
XV. Détonnation des nitrates mêlés de phosphore . . ibid.

VII. Rapports présentés par des Académiciens chargés de commissions particulières :

I. Sur une cochenille indigène 46
II. Sur quelques projets hydrauliques 47
III. Sur une trisection de l'angle et une quadrature du cercle . 49
IV. Conducteurs aux magazins à poudre 52
V. Sur le Baryte strié de Zméof . . . . . ibid.
VI. Sur un téléscope de Herschel de 20 pieds. . . . 53
VII. Sur un instrument nommé Scotographe 54
VIII. Discussions d'une question de Mécanique . . . 56
IX. Sur quelques mémoires d'Analyse de Mr. le Comte de Trédern 57
X. Sur un enduit prétendu incombustible . . . ibid.

Page

VIII. Leçons publiques 58

IX. Ouvrages publiés par l'Académie . . ibid.

X. Prix proposé par le Roi d'Espagne . 59

XI. Extraits des mémoires contenus dans ce volume:

I. Classe de Mathématique et de Physico-Mathématique . 63
II. Classe de Physique 75
III. Classe d'Astronomie et de Météorologie . . . 83

XII. Mémoires étrangers, présentés et lus à l'Académie:

I. Lettre sur plusieurs médailles de la Sarmatie d'Europe et de la Chersonèse Taurique etc. par Mr. le Cons. de Collèges de Köhler: 99
II. Dubia contra Josephi Gall de organis in cerebro distinctis, iisque cranii ope detegendis, hypothesin. Auct. C. A. Rudolphi . 131
III. Descriptio novi Plantarum generis. Auct. M. F. Adams . 164

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS
Tomus XIV.

MATHEMATICA et PHYSICO-MATHEMATICA.

Pag.

L. Euleri. Facillima methodus plurimos numeros praemagnos inveniendi 3

—— . Methodus generalior numeros quosvis satis grandes examinandi, utrum sint primi, nec ne? 11

—— . Observatio singularis circa aequationes differentiales lineares 52

—— . De integrationibus difficillimis quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt . 62

—— . Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1 + x + x\,x)^n$. 75

Nicolai Fuſs. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet 111

—— . Démonstration de quelques Théorèmes de Géométrie 139

Joh.

Pag.

Joh. Trembley. Recherches sur les équations aux différences partielles, du premier degré, à quatre et plusieurs variables . . . 153

Nicolai Fuſs. Recherches sur la sphère et le cylindre percés cylindriquement, et sur une infinité de manières de percer la sphère de façon que le résidu de sa surface et de sa solidité soit géométriquement assignable . 213

C. F. Kausler. De numeris qui semel vel pluries in summam duorum quadratorum resolvi possunt 232

—— . Remarques pour faciliter la recherche des diviseurs des nombres premiers . . 268

W. L. Krafft. Serierum principalium, quae sinus angulorum multiplorum exprimunt, demonstratio elementaris 290

S. Gourief. Observations sur le théorème de Taylor, avec sa démonstration par la méthode des limites etc. 306

PHY-

PHYSICA.

Pag.

N. Ozeretskovski. De lacte caprino et vaccino . 339

T. Lowitz. Methodi novae acidum tartaricum omne e tartaro crudo extricandi expositio . 343

B. Severgin. Histoire naturelle des Géodes . 357

N. Ozeretskovski. De duobus foetibus humanis monstrosis 367

I. T. Kölreuter. Mirab. Jalapparum hybridarum spicilegium ultimum 373

B. F. I. Hermann. Notices sur les roches des monts Altaï en Sibérie 409

Joann. Lepechin. Symphyti asperi nova species descripta 442

B. F. I. Hermann. Notice sur une grouppe remarquable de spath de plomb de la Sibérie . 445

Laur. de Crell. An ad aetherum naturam constituendam necessaria sint acida disquirit . 450

I. Fr. Gmelin. Descriptio et Analysis lapidis Marecani 459

T. Smelovski. De plantis tetradynamis vulgo cruciformibus 470

Pag.

C. P. Thunberg. Plantae contortae in Promontorio bonae Spei Africes olim collectae jamque descriptae 503

A. Sevastianoff. Description du Sparus ornatus, nouvelle espèce de poisson thorachique . 521

C. P. Thunberg. Hermas, plantae genus descriptionibus, animadversionibus et iconibus illustratum 527

ASTRONOMICA et METEOROLOGICA.

Pag.

G. T. F. Beitler. Sur le calcul des variations des étoiles 537

S. Rumovski. De transitu Mercurii per Solem anno 1799 die $\frac{26\ Apr}{7\ Mai}$ expectando 603

F. T. Schubert. Sur les passages de Mercure sur le soleil qui auront lieu dans le dixneuvième siècle 609

——. Supplément au mémoire précédent . . 656

——. Théorie de Mars 674

——. Sur les perturbations de la nouvelle planète par l'action de Jupiter . . . 714

Pag.

Steph. Rumovski. Observatio eclipsis solis anno 1802 die $\frac{16}{28}$ Aug. habita in observatorio Petropolitano 728

W. L. Krafft. Annotationes ad acus magneticae inclinatoriae usum pertinentes 729

G. T. F. Beitler. Supplément aux observations astronomiques faites à l'Observatoire du Gymnase académique de Mitau 733

F. T. Schubert. Observationes nonnullae astronomicae in specula Academiae institutae . 747

W. L. Krafft. Continuation du mémoire sur le perfectionnement d'une méthode de trouver sur mer la latitude du vaisseau 764

I. A. Euler. Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1797 . . . 776

—— . Extrait des observations météorologiques, faites à Moscou en 1797 par Mr. Stritter . 797

—— . Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en 1798 . . . 808

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉES MDCCXCVII ET MDCCXCVIII.

I.
Evènemens mémorables.

I. Visite du Roi de Pologne.

Le 29 Mai 1797 l'Académie fut honorée de la visite de son auguste membre honoraire, *Stanislas Auguste* Roi de Pologne. Sa Majesté s'étant fait anoncer le 27 Mai, M^rs^ les Académiciens se rendirent le surlendemain à la grande Salle de la Bibliothèque et y attendirent le Roi qui arriva accompané de quelques Cavaliers et Officiers de sa suite à onze heures avant midi. Sa Majesté fut reçue au sortir de la voiture par S. E. M^r^ le Directeur Bacounin qui, après avoir présenté au Roi tous les Académiciens assemblés, le conduisit, conjointement avec eux, par tous les apartemens de la Bibliothèque et du Musée, et Sa Majesté examina avec attention tout ce que ces deux collec-

tions renferment de plus rare et de plus curieux. De là S. M. fut menée à l'Observatoire astronomique et enfin au grand globe de Gottorp: le Roi honora d'un intérêt particulier tout ce qu'on lui montra et ne quitta l'Académie qu'après trois heures, en témoignant sa satisfaction à Mr le Directeur et aux Académiciens démonstrateurs, en les remerciant dans les termes les plus gracieux.

II. Visite de L L. A A. S S. Mgrs les Princes de Würtemberg.

Le 13 Août 1798, à la fin de la Conférence académique, Monseigneur le Prince Auguste et Monseigneur le Prince Charles de Würtemberg, freres de *Sa Majesté l'Impératrice*, se firent annoncer et demandèrent à voir le Musée académique. Mr le Baron de Nicolay, Président de l'Académie, accompagné de plusieurs Académiciens, s'empressa de conduire ces illustres voyageurs par tous les départemens de la Bibliothèque et du Musée, et de leur montrer tous les objets propres à fixer et à satisfaire leur curiosité.

II.

Changemens arrivés dans l'Académie.

I. Nomination d'un nouveau Président.

De tous les événemens qui ont eu lieu pendant la période des deux années, dont nous avons à tracer l'Histoire dans ce volume, le changement de Chef, arrivé le 14 Avril 1798, doit être regardé à juste titre comme le plus

plus important, à cause de sa grande influence sur toutes les branches de l'administration du premier établissement savant de l'empire. M^r le Chambellan actuel de Bacounin ayant demandé sa dimission, après avoir fait depuis l'an 1794 les fonctions de Directeur de l'Académie, à la place du Directeur effectif absent: *Sa Majesté l'Empéreur* la lui accorda et nomma en même tems Président de *Son* Académie des Sciences S. E. M^r le Conseiller d'Etat actuel Baron de Nicolay, membre du Cabinet de *Sa Majesté* et Chevalier de l'ordre de Ste Anne de la premiere classe. Par cette nomination, si propre à remplir l'Académie de la plus grande satisfaction, la place de Directeur, qui avoit été créée autrefois à cause des fréquentes et longues absences de l'ancien Président, S. E. M^r le Feld-Marechal Comte de Razoumofski, fut abolie, et la charge de Président rétablie conformément au reglement de l'Académie. Le nouveau Chef commença l'exercice de ses fonctions le 19 Avril 1798.

II. Membres décédés.

La liste des membres honoraires externes de l'Académie étoit décorée depuis nombre d'années des noms augustes de deux Rois qui, par la protection puissante et soutenue qu'ils avoient accordée aux sciences et aux arts, s'étoient acquis un genre de gloire indépendant de celui qui est le partage du thrône, mais aussi solide et brillant d'un éclat dont le reflêt ne pouvoit qu'ajouter à la gloire d'un corps savant qui avoit eu le précieux avantage de s'associer ces princes. L'Académie s'est vu enlever ce glorieux avantage dans le court espace de trois mois.

Fré-

Frédéric Guillaume II, Roi de Prusse étant encore Prince Royal, avoit daigné honorer l'Académie de sa visite et assister à une assemblée solomnelle convoquée en son honneur, lors de son séjour à St. Pétersburg. Le 1 Octobre 1780, la veille de son départ, il avoit bien voulu accepter le diplome de membre honoraire, que l'Académie en corps avoit été lui présenter très-réspectueusement; et depuis cette époque l'Académie a reçu plus d'une marque de son estime et de sa bienveuillance, qu'il lui a fait témoigner par des lettres adressées au Secrétaire perpétuel. Il mourût le $\frac{5}{16}$ Novembre 1797.

Stanislas Auguste, Roi de Pologne, de la maison de Poniatovski, avait daigné accepter en 1777 le tître de membre honoraire de l'Académie, et lui avoit conservé jusqu'à son decès un attachement des plus flatteurs. Il mourût le 1 Fevrier 1798.

Le Comte Iwan Grigorievitsch Tchernychef, Vice-Président du Collège de l'Amirauté, Sénateur, Chambellan actuel et Chevalier des ordres de St. André, de St. Alexandre Nevski, de Ste. Anne et de St. Vladimir de la 1re Classe et de l'aigle blanc, qui avoit été reçu membre honoraire de l'Académie le 29 Décembre 1776, mourût, à la suite de plusieurs coups d'Apoplexie, le 26 Fevrier 1797, agé de 70 ans. Il se trouve dans les Actes de l'Académie pour l'année 1779 (Acta Acad. Imp. Sc. ad annum MDCCLXXIX. Pars prior) un lettre de lui, contenant des expériences faites par ordre du Collège de l'Amirauté sur l'inflammation spontanée d'un mélange de suye et d'huile, à la suite de l'accident arrivé à la frégatte Marie qui

avoit

avoit pris feu, parcequ'il s'y étoit trouvé un pareil mélange, reste des couleurs dont on avoit peint le bâtiment.

Jean Henry Samuel Formey, Ministre du St. Evangile, Professeur de Philosophie, Conseiller privé de S. M. le Roi de Prusse, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin, Directeur de la Classe de Philosophie de la même Académie et membre de plusieurs autres, qui avoit été reçu au nombre des membres honoraires externes de l'Académie en 1748, et qui obtint la pension académique en 1766, décéda à Berlin le 8 Mars 1797, dans la 86me année de son âge.

Antoine Marie de Lorgna, Brigadier des Ingénieurs au Service de la République de Venise, et Professeur de Mathématiques à l'école militaire de Verone, mourût à Verone au mois de Fevrier 1797, âgé de 65 ans. Il avoit été reçu au nombre des membres honoraires externes de l'Académie le 27 Décembre 1776. Il se trouve un mémoire de lui dans les *Acta* de l'Académie, année 1779. Partie seconde, et un autre mémoire, sur les fonctions discontinues, a été imprimé à la suite du mémoire couronné sur cette question d'Analyse.

Jean de Schouvalof, Grand Chambellan, Conseiller privé actuel, Fondateur de l'Académie des arts, Fondateur et premier Curateur de l'Université de Moscou, Chevalier des ordres de St. André, de St. Alexandre Nevski, de Ste. Anne, de St. Vladimir de la premiere Classe, de l'aigle blanc et de St. Stanislas, reçu membre honoraire regnicole de l'Académie le 29 Décembre 1776, mourût en Novembre 1797.

Jo-

Joseph de Mohrenheim, Baron du St. Empire, Docteur en Médecine et Chirurgie, Conseiller de Cour, Opérateur et Oculiste de *Sa Majesté l'Impéreur*, Médecin Accoucheur de *Sa Majesté l'Impératrice* et Directeur de l'Institut pour les sagesfemmes, mourût le 17 Novembre 1797 âgé de 41 ans. Il avoit été reçu au nombre des membres honoraires de l'Académie le 3 Mars 1791.

Jean Michel Renovanz, Sur-Intendant des mines du Cabinet de *Sa Majesté Impériale*, Inspecteur de l'école des mines, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4e Classe, membre de la Société libre économique de St. Petersbourg et des Sociétés des Scrutateurs de la nature à Berlin et à Jena, mourût le 28 Août 1798, âgé de 53 ans. Il avoit été reçu au nombre des Correspondans titrés de l'Académie le 21 Juin 1779, et fut employé en 1786 à arranger, conjointement avec Mr. l'Académicien Georgi, le Cabinet de Minéraux de l'Académie, et à en dresser le Catalogue, d'après le Système de Wallerius. En recompense de ce travail l'Académie lui accorda la pension académique de deux-cens Roubles. On a de lui une déscription minéralogique et topographique des monts Altaï, qui est avantageusement connuë.

III. Nomination de deux Académiciens ordinaires à la place de Censeurs.

En vertu d'un Oukaze de *Sa Majesté l'Empéreur*, publié par le haut et dirigeant Sénat le 16 Fevrier 1797, relatif au nouvel établissement des Censures, Mr. le Conseiller de Cour Kotelnikof et Mr. le Conseiller de Cour et

et Chevalier Inochodzof furent nommés Censeurs savans, le premier à la Censure de St. Pétersbourg, le second à celle de Riga, chacun avec 1800 Roubles d'appointemens, en gardant 200 Roubles de pension académique et le droit de rentrer dans leurs places d'Académiciens, au cas que les circonstances les forçassent de quitter leurs places de Censeurs.

IV. Nouvelles receptions.

Mr. Alexandre Nicolas Scherer, Docteur en Philosophie, Conseiller des mines de S. A. S. Mgr le Duc de Saxe-Weimar, Secrétaire perpétuel de la Société de Physique à Jena et membre de plusieurs Sociétés savantes. Reçu Correspondant de l'Académie le 27 Juillet 1797.

Mr. *Jean Henry Rudolf*, Docteur en Médecine, Professeur de Thérapeutique, de Botanique, de Chirurgie et d'accouchement à l'Institut *Impérial* de Médecine et de Chirurgie de St. Pétersbourg. Reçu Associé honoraire regnicole le 28 Août 1797.

Mr. Gustave de Paykull, Conseiller de Chancellerie de S. M. le Roi de Suède, membre des Académies Royales de Stockholm et d'Upsal. Reçu Associé honoraire externe le 27 Novembre 1797.

Mr. Jean Christophe Schwab, Conseiller de Cour de S. A. S. Mgr le Duc de Würtemberg, Professeur de Philosophie au Cymnase illustre de Stuttgard. Reçu Correspondant titré de l'Académie le 15 Fevrier 1798.

Mr. Jean Théophile Fréderic Schrader, ci-devant Professeur de Philosophie à Kiel, Opticien au Service de l'Académie *Impériale* des Sciences. Reçu membre honoraire le 29 Mars 1798.

Mr. Christophe Fréderic Kausler, Conseiller de Cour et Gouverneur des Pages de S. A. S. Mgr le Duc de Würtemberg. Reçu au nombre des Correspondans titrés le 23 Fevrier 1797; au nombre des Pensionnaires le 26 Avril 1798 et au nombre des Honoraires externes le 30 Avril 1798.

Mr. Jean Fréderic Pfaff, Professeur de Mathématiques à l'Université de Helmstedt et Correspondant de l'Académie. Reçu Associé honoraire externe le 7 Mai 1798.

Mr. Jean Trembley, Académicien de Berlin et Correspondant de l'Académie *Impériale* des Sciences de St. Pétersbourg. Reçu Associé honoraire externe le 7 Mai 1798.

Mr. Jean François Vauvilliers, ancien Professeur de langue grecque au Collège de France et membre de l'Académie des Inscriptions et Belles-lettres de Paris. Reçu par ordre de *Sa Majesté l'Empéreur*, Académicien ordinaire pour la Philologie le 7 Juin 1798.

Mr. Erneste Christophe Schultz, Professeur honoraire d'Histoire naturelle et membre de la Société physique de Göttingue. Reçu Correspondant le 28 Juin 1798.

Mr. Thomas Tychorsky, Conseiller d'Etat; premier Médecin de l'hôpital militaire de St. Pétersbourg et membre honoraire du Collège de Médecine. Reçu Associé honoraire regnicole le 15 Octobre 1798.

Mr.

Mr. Théodore Svenske, Conseiller de Cour, Docteur en Médecine et Censeur *Impérial* à Radzivil. Reçu au nombre des Correspondans le 22 Octobre 1798.

V. Promotions académiques et avancemens civils.

Le 3 Janvier 1797 le Directeur en fonction, Mr. le Gentil-homme de la Chambre Paul de *Bacounin* fut avancé au rang de Chambellan actuel de *Sa Majesté Impériale.*

Le 23 Fevrier 1797 Mr. l'Adjoint *Busse* fut nommé Bibliothécaire et Sur-Intendant du Musée académique, à la place de Mr. l'Académicien Kotelnikof. et le 17 Mars de la même année il fut avancé au rang de Conseiller de Cour.

Le 5 Avril 1797 Mr. le Conseiller de Collège *Roumovski* fut avancé au rang de Conseiller d'Etat, et M^rs^ les Conseillers de Cour *Euler*, *Lepechin* et *Ozeretskovski* au rang de Conseillers de Collège.

Le Mai 1797 Mr. l'Académicien *Lowitz* fut élevé au rang de Conseiller de Cour.

Le 31 Janvier 1798 Mr. le Professeur extraordinaire *Zacharof* et Mr. l'Adjoint *Gourief* furent nommés, par un ordre Suprême, Académiciens ordinaires avec les appointemens fixés par l'Etat de l'Académie.

Le 21 Août 1798 Mr. l'Académicien *Severguine* fut avancé au rang de Conseiller de Cour.

Le 10 Novembre 1798 Mr. le Conseiller de Cour *Hermann* fut nommé par un ordre de *Sa Majeste Impériale* membre du Collège des Mines, avec la permission de garder sa place à l'Académie.

VI. Gratifications, récompenses et distinctions littéraires.

Le 13 Mars 1797 Mr. I. E. *Bode*, Académicien de Berlin et Associé honoraire externe de l'Académie fut gratifié de la pension académique vacante par la mort de Mr. le Conseiller privé Formey.

Le 1 Mai 1797 Mr. le Professeur extraordinaire *Zacharof* et Mr. l'Adjoint *Gourief* reçurent une augmentation de leurs appointemens.

Au mois de Juillet 1797 Mr le Conseiller de Cour *Hermann* remporta le prix proposé par la Société Royale des Sciences de Bohème sur la question: quelle différence y a-t'il entre le fer de fonte et le fer forgé, et quelle maniere est la meilleure et la plus profitable de préparer le dernier?

Le 1 Octobre 1797 Mr. le Conseiller de Cour de *Zimmermann*, Associé honoraire externe, fut gratifié, par ordre de *Sa Majesté l'Empereur*, de la pension académique.

Le 25 Octobre 1797 Mr. l'Académien *Fuſs* fut reçu par l'Académie Royale des Sciences de Stockholm au nombre de ses membres honoraires externes.

En

En Novembre 1797 Mrs. les Académiciens *Lepechin* et *Ozeretskovski* furent reçus membres honoraires du Collège de Médecine.

En Décembre 1797 la Société Royale des Sciences de Göttingue reçut Mrs. les Conseillers de Cour *Hermann* et *Busse* au nombre de ses membres externes.

En Janvier 1798 Mr. l'Académicien *Fuss* remporta le prix proposé par la Société Royale des Sciences à Copenhague, sur la question concernant la Théorie de la résistance que les chariots à deux et à quatre roues éprouvent sur les différentes espèces de chaussées.

Le 1 Fevrier 1798 Mr. le Conseiller de Cour et Académicien *Severguine* fut gratifié d'une augmentation de ses appointemens.

Le 19 Fevrier 1798 Mr. l'Académicien *Gourief* reçut de la part de *Sa Majesté l'Empereur* une gratification de 300 Roubles, pour un ouvrage qu'il avoit presenté.

Le 11 Mars 1798 le Cabinet de *Sa Majesté Impériale* assigna une pension annuelle de 400 Roubles à Mr. le Conseiller de Cour et Académicien *Hermann*, en le chargeant de quelques commissions particulieres pour l'expédition des mines de ce Cabinet.

En Mars 1798 le même Académicien fut reçu membre externe de l'Académie Impériale des Scrutateurs de la nature à Erlang et de la Société Royale des Sciences de Bohème.

Aussi

Aussi en Mars 1798 Mrs. les Académiciens *Krafft* et *Severguine* furent reçus au nombre des membres honoraires externes du Bureau Britannique d'Agriculture à Londres.

Le 20 Avril 1798 la Société Royale des Sciences de Copenhague reçut Mr. l'Académicien *Fuſs* au nombre de ses membres honoraires externes.

III.

Présens faits à l'Académie.

I. Pour la Bibliothèque.

De la part de Mr. de *Zach*:

Tabulae motuum Solis novae et correctae, ex Theoria gravitatis et observationibus recentissimis erutae. Auct. Francisco de *Zach*. Gothae 1792. in 4to.

Tabulae speciales aberrationis et nutationis in ascensionem rectam et declinationem, una cum insigniorum 494 stellarum zodiacalium catalogo novo ad initium anni 1800. 4to.

Bestimmung der Polhöhe des Stiftes Tepel; von P. Alois *David*. 4to.

Geographische Länge und Breite des Stiftes Tepel; von P. Alois *David*. Prag 1793. 4to.

Geographische Breite des Stiftes Hohenfurt; von ebendemselben. Prag 1794. 8vo.

Geographische Ortsbestimmungen im östlichen Schwaben; von I. A. *Amman*. Dillingen 1796. in 8vo.

Ueber die Meinungen der Alten von unserm Sonnen-System. Eine Einladungsschrift von I. C. *Schaubach*. Meiningen 1796. 4to.

Table

Table de la différence des meridiens en tems, entre l'Observatoire de Gotha et les principaux lieux de la terre, avec leur longitude, latitude et distances en milles géographiques. 16mo.

Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem, nebst einigen verwandten und andern Sätzen, neu bearbeitet und dargestellt von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg, durch Carl Fr. *Hindenburg*. Leipzig 1796. 8vo.

De la part de Mr l'Académicien *Bode*:

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1799. Berlin 1796. 8vo.

Astronomische Tafeln, zu Bestimmung der Zeit, aus der beobachteten gleichen obwol unbekannten Höhe zweier Fixsterne; von Jul. Aug. *Koch*. Berlin 1797. 8vo.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour *Kausler*:

L. Eulers vollständige Anleitung zur Algebra. Dritter Theil: enthaltend die Zusätze von Lagrange; aus dem Franz. übersetzt und mit Erläuterungen und einigen dahin einschlagenden Abhandlungen und einem Anhange begleitet vom Hofrath *Kausler* etc. Frankf. am Mayn 1796. 8vo.

De la part de l'auteur:

Almanach von 365 Tagen und eben so viel Nächten, in einer Auswahl von lehrreichen, wahrhaften, vorzüglichen Geschichten, Sprüchen und Reden etc. Wien 1797. 8vo.

De la part de Mr. l'Acad. *Hermann*:

Ueber die Hauptmängel einiger Eisenhütten in Deutschland, vom Berg-Hauptmann von Veltheim, und Bemerkungen über den Eisenhütten-Haushalt, vom Hofrath *Hermann*. Helmstadt 1795. 8vo.

De la part de Mr. de *Koutouzof*:

Путешествіе въ Южной половинѣ земнаго шара и во кругъ онаго — подъ началъ ствомъ Капитана Якова Кука. Часть I. въ Санктъ-Петербургѣ 1796 года.

De

De la part des auteurs :

Memoria sul principio delle velocità virtuali; del Cavalier *Vitt. Fossombroni.* Firenze 1796 4to.

Antichità, vantaggi e metodo della pittura encausta. Memoria del Sgr Giov. *Fabbroni.* Roma 1797. 4to.

Di una singolarissima spezie di Mattoni, ossia ritrovamento degli antichi mattoni galleggianti; dal Sgr. Giov. *Fabbroni.* Venezia 1797. 8vo.

Idea di un Repertorio per i resultati d'osservazioni o esperienze relative alle materie combustibili etc. di Giuseppe *Tofani.* Firenze 1796. 8vo.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode* :

La premiere livraison de l'Atlas céleste, contenant les planches IV, VI, VII, VIII.

De la part de Mr. le Cons. des mines *Scherer* :

Nachträge zu den Grundsätzen der neuern chemischen Theorie. Jena 1796. 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Schröter* :

Aphroditographische Fragmente, zur genauern Kenntniſs des Planeten Venus, Helmstedt 1796. 4to.

De la part de Mr. le Cons. de Collèges *Koch* :

I. C. *Koch's*, Russisch Kaiserl. Kollegien-Raths, Vergleichungen mineralogischer Benennungen der Deutschen mit Arabischen Wörtern. Leipzig 1795. 8vo.

De la part de S. E. Mr. le Prince de *Galitzin* :

Seconde lettre à Mr. de Zimmermann, ou Observations sur les voyages de l'Abbé Spalanzani dans les deux Siciles. Brunsvik 1797. 8vo.

De la part de l'auteur :

Angulorum rectaeque lineae trisectio et Consectaria circuli quadratio, utramque methodo planissima detexit I. N. *Reray.* Viennae 1797. 8vo.

De

De la part de l'auteur:

An account of the trigonometrical Survey, caried on in the Years 1791 — 1794; by Lieut. Col. Edward *Williams*, Cap. William *Mudge* and Mr. Isaac *Dalby*.

De la part de l'auteur:

L'uomo galleggiante, o l'arte ragionata del nuoto; dal Dottore Oronzio di *Bernardi* P. 1 et 2. Napoli 1794 4to.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode*:

La seconde livraison de l'Atlas céleste, contenant les feuilles III, V, IX, X.

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1800. Berlin 1797. 8vo.

Sammlung astronomischer Abhandlungen und Beobachtungen. 3ter Supplement-Band. Berlin 1797. 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Pfaff* à Stutgard:

Fragment der Staats-Verfassungs-Geschichte des Deutschen Reichs. Manheim 1797. 8vo.

De la part de Mr. le Prof. *Pfaff* à Helmstedt:

Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes. Auct. I. Fr. *Pfaff*. Vol. I. Helmstadii 1797. 4to.

De la part de l'Académie Royale de Berlin:

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres. Années 1788 et 1789. Berlin. 4to.

Sammlung deutscher Abhandlungen, welche in der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin vorgelesen worden, in den Jahren 1788 und 1789. Berlin. in 4to.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres. Années 1790 et 1791. Berlin. 4to.

Sammlung der deutschen Abhandlungen, welche in der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin vorgelesen worden in den Jahren 1790 und 1791. Berlin. 4to.

De la part de l'auteur :

Dr. Reil : Ueber die Erkenntniſs und Cur der Fieber. Erster Theil. Allgemeine Fieber-Lehre. Halle 1797. 8vo.

Joannis Christiani Reil Exercitationum anatomicarum fasciculus primus. De structura nervorum. fol.

De la part de Mr. le Professeur *Schwab* :

Von den Ursachen der Allgemeinheit der französischen Sprache und der wahrscheinlichen Dauer ihrer Herrschaft Stutgard 1785. 8vo.

Abhandlung, welche den von der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin für das Jahr 1788 ausgesetzten Preis erhalten hat, von Hrn Joh. Christ. *Schwab*. Berlin 1789. 8vo.

Euclid's Data, verbessert und vermehrt von Rob. Simson; aus dem Englischen übersetzt und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten, aufgelöster Probleme begleitet; von Joh. Chr. *Schwab*. Stutgard 1780. 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Colland* :

Kurzer Unterricht in der Geburtshülfe für Stadt- und Land-Hebammen von Fr. *Colland*. Wien 1797. 8vo.

Kurzer Innbegriff von dem Ursprunge der Wissenschaften, Schulen, Academien und Universitäten in ganz Europa, besonders aber der hohen Schulen und Academien zu Wien. Wien 1796. 8vo.

De la part le Mr. le Cons. de Collèges *Karpinski* :

Pharmacopoea Rossica. Petropoli 1798. 8vo.

De la part de Mr. de *Zach* :

Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen; von W. *Olbers*. M. D. Weimar 1797.

De la part de Mr. Cons. de Coll. *Lepechin* :

Краткое руководство къ разведенію шелка въ Россіи. Санктпетерб. 1798.

De

De la part de Mr. le Cons. de Cour *Zimmermann* :

Essai de comparaison entre la France et les Etats unis de l'Amérique septentrionale; par E. A. W. de Zimmermann, traduit de l'Allemand. Tome I. Leipzig 1797. 8vo.

Allgemeiner Blick auf Italien; nebst einigen geographisch-statistischen Aufsätzen die süd-östlichen Theile dieses Landes betreffend; von E. A. W. von Zimmermann. Weimar 1787. 8vo.

De la part de Mr. *Thiele*, Pasteur à Rathstock :

Gedanken über die Reden Jesu, nach dem Inhalt der evangelischen Geschichte von *Baumgarten*. Pförten 1797.

De la part de Mr. le Pasteur *Busch* :

Uebersicht der Fortschritte der Wissenschaften, Künste, Manufacturen und Handwerke. 1r u. 2r Band. Erfurt 1797 und 1798.

De la part de Mr. le Docteur *Murhard* :

Constructio generalis formularum differentialium in forma $\frac{\partial x}{(n)} = A\left(\frac{x}{(n+1)} + \frac{\varrho x}{(n)}\right)$ contentarum, sive solutio problematis : datis his aequationibus investigare valorem $\frac{x}{(n)}$. Göttingae 1797. 8vo.

Ueber die Methode des Hrn. La Grange alle Gleichungen durch Näherungen vermittelst der Reihen aufzulösen; von F. W. A. *Murhard*. Göttingen 1796. 4to.

System der Elemente der allgemeinen Gröfsenlehre, nebst ihrem Zustande am Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Herausgegeben von Fr. *Murhard*. Lemgo 1798. 4to.

De la part de l'Académie Royale de Stockholm :

Astronomie forfätted af Daniel Melanderhielm I, II Delen. Stockholm 1795. 8vo.

De la part de Mr. l'Académicien *Fufs* :

Начальныя Основанія Алгебры, сочиненныя въ пользу Кадетскаго корпуса Николаемъ Фусомъ Санктпетербургъ 1798. 8vo.

Leçons de Géométrie, à l'usage du Corps Impérial des Cadets nobles de Terre; par Nicolas *Fuss*. St. Petersbourg. 1798.

De la part de l'Académie Impériale des curieux de la nature.

Acta physico-medica Academiae Caesareae naturae curiosorum Leopoldino-Carolinae. Tomus VIII. Norimb. 1791.

II. Pour le Cabinet de Minéralogie.

De la part de S. E. Mr. le Conseiller privé et Chevalier de *Nartoff*:

Un morceau de quartz-rose de Finnlande d'une grande beauté.

Deux echantillons d'une nouvelle espèce de Granite, trouvée sur les côtes de la mer blanche.

Une pièce de Spath jaunâtre doublant les objets, trouvé dans les fentes d'un rocher, près du village Sargouba, sur la rive du lac Youkscha, à vingt verstes de Petrosawodsk.

De la part de Mr. le Sur-Intendant des mines *Renovantz*:

Huit minerais d'argent des minieres de Kolyvan.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour *Lowitz*.

Deux cent quatrevingt huit crystallisations modelées en cire et classées selon les principales espèces de sels, dans six tiroirs vitrés, savoir: 48 crystallisations d'acides et de sels lixiviens; 116 de sels à base alcaline; 40 de sels à base terreuse; 54 de sels à base métallique; 30 de sels sursaturés, à base double et essentiels.

Quatre-vingt cinq efflorescences de différens sels, obtenues par leur évaporation sur des carreaux de verre, fournissant des caractères plus invariables que les crystallisations.

De

De la part de Mr. le Conseiller de Cour *Hermann*.

Une collection de trente-huit mineraux et fossiles qu'il a reçus des monts Altaï et qui sont tous tirés de nouvelles minières et en grande partie entièrement nouveaux.

De la part du Jouaillier Mr. *Hechelmuller*:

Quelques pieces de pierre de Labrador, trouvée aux environs de St. Pétersbourg.

III. Pour le jardin botanique:

Plusieurs paquets de semences, envoyés à l'Académie par Mr. le Conseiller d'Etat et Chevalier Pallas, par Mr. le Sur-Intendant des mines Schanguine et par Mr. le Docteur Schenk.

IV. Pour le cabinet d'Histoire naturelle:

De la part de Mr. le Conseiller de Cour *Hermann*:

Un nid d'oiseau, savoir du rémès (Parus Pendulinus), d'une construction remarquable et très-curieuse, trouvé aux environ du lac Nor-Saissan dans la Tartarie Chinoise.

De la part de Mr. le Professeur *Schultz*:

Une petite espèce de Crabe entre deux verres, qui a celà de particulier: que sa taye, ou son dos, porte l'empreinte d'un visage humain.

Une patelle des côtes du détroit de Magellan, qui, exposée au Soleil, jette une lueur en couleurs très-vives.

V. Pour le Médailler:

De la part de l'Académie *Impériale Russe*:

Le nouveau jetton que cette Académie a fait frapper, pour être distribué aux membres qui assistent aux séances académiques.

IV.

Mémoires et autres ouvrages manuscrits présentés à l'Académie.

1797

Le 9 Janvier. Recherches sur les équations linéaires aux différences partielles; *par Mr. Jean Trembley.*

Le 12 Janvier. Observation de l'obliquité de l'écliptique dans le solstice d'été 1796; *par Mr. le Prof. Beitler.*

— — — Observations des eclipses des Satellites de Jupiter, faites en 1796 à l'observatoire de Mitau: *par le même.*

— — — Observation de l'eclipse du Soleil du 3 Avril 1791, faite à l'observatoire de Mitau; *par le même.*

Le 16 Janvier. Aelteste Urkunden des Bergbaues im Russischen Reiche; *par Mr. Jean Lehmann.*

Le 19 Janvier. Observationes analyticae ad L. Euleri Institutiones calculi integralis Vol. IV. Suppl. II. et IV; *par Mr. le Professeur Pfaff.*

Le 23 Février. De motu baculi super plano inclinato; *par Mr. l'Acad. Fuſs.*

— — — Notice sur le Quartz-rose de Finnlande; *par Mr. le Cons. privé de Nartoff.*

Le 27 Février. Eclipses Satellitum Jovis, Petropoli anno 1796 in Specula domestica observatae; *par Mr. l'Acad. Inochodsoff.*

Le 9 Avril. Problemata ex doctrina sphaerica; *par Mr l'Acad. Schubert.*

Le 13 Avril. Первыя основанія Минералогіи, или естественной Исторіи ископаемыхъ тѣлъ: *par Mr. l'Acad. Severguine.*

Le 17 Avril. Гирманнера начальныя основанія Химіи, горючее существо опровергающей: *par Mr. le Prof. Zacharof.*

Le 20 Avril. Von den nächsten und entfernten chemischen Bestandtheilen der Pflanzen und Pflanzen-Substanzen. Dritte Abtheilung. Von den öligen Bestandtheilen; *par Mr. l'Acad. Georgi.*

Le

Le 24 Avril. De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1} \partial x \, (\Delta + x^n)^{\lambda}$ in seriem semper convergentem, ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur; *par Mr. l'Acad. Fuſs.*

Le 1 Mai. Mémoire sur la maniere la plus facile et la plus promte de préparer l'acide nitreux le plus pur et le plus fort; *par Mr. le Prof. Zacharof.*

Le 4 Mai. Notice d'une nouvelle espèce de Granite, trouvée sur l'île Rab, dans la mer blanche; *par Mr. le Cons. privé de Nartoff.*

Le 22 Mai. Mémoire sur la résolution des principaux problèmes qu'on peut proposer dans les courbes, dont les ordonnées partent d'un point fixe; *par Mr. l'Assesseur Gourieff.*

Le 12 Juin. Characteres et descriptiones Insectorum novorum in Tauride nec non in regionibus Borysthenem fluviumque Donetz adjacentibus observatorum, Specimen I; *par Mr. le Conseiller de Cour Böber.*

Le 15 Juin. Examen théorétique des revêtemens à assises inclinées et à dos incliné, proposés par quelques auteurs de fortification; *par Mr. l'Acad. Fuſs.*

Le 20 Juillet. Начертаніе Исторіи Вселенныя отъ небытія до произхожденія животныхъ; *par Mr Yertoff.*

Le 28 Septembre Опытъ о усовершеніи Елементовъ Геометріи; *par Mr. l'Adjoint Gourieff*

Le 12 Octobre. Von den nächsten und entfernten Bestandtheilen der Pflanzen und Pflanzen-Substanzen. Fortsetzung der dritten Abtheilung. Von den öligen Bestandtheilen; *par Mr. l'Acad. Georgi.*

— — — Notice d'un Spath jaunâtre doublant les objets, trouvé dans les fentes d'un rocher près du village Sargouba, sur la rive du lac Youkscha, à vingt verstes de Petrosavodsk; *par S. E. Mr le Conseiller privé de Nartoff.*

Le 2 Novembre. Beytrag zu richtiger Beurtheilung der Eigenschaften und Würkungen der Gewölber, wie auch zu adaequater Benennung der Theile derselben; *par Mr Meerwein.*

Le

Le 4 Décembre. Mirabilium Jalapparum hybridarum continuata descriptio; *par Mr. le Conseiller Kölreuter.*

Le 14 Décembre. Occultation de ε du capricorne, observée à l'observatoire de l'Académie le 7 Août 1797; *par Mr. l'Acad. Henry.*

— — — Essai sur la détermination de la longueur du pendule simple, sous la latitude de St. Pétersbourg; *par le même.*

— — — Observation de la déclinaison de l'aiguille aimantée, faite à St. Pétersbourg; *par le même.*

— — — Formule pour déterminer la hauteur vraye et l'azimuth vrai d'un astre, au moyen de sa hauteur apparente et de son azimuth apparent, et réciproquement, dans l'hypothèse, que la terre est une ellipse de révolution; *par le même.*

— — — Integratio formulae $p^3v^2\partial v = nv\partial p + np\partial v(1-p)(2-p)$; *par Mr. l'Acad. Roumovski.*

1798

Le 15 Janvier. Recherches sur les équations linéaires du troisième degré; *par Mr. l'Acad. Trembley.*

Le 19 Février. Mémoire sur la crystallisation métallique de la platine, et sur celle d'une dissolution de ce métal dans une eau régale composée; *par S. E. Mr. le Comte de Moussin-Pouchkin.*

Le 12 Mars. Notice d'une crystallisation curieuse de l'Hématite compacte brun de Kamensk'; *par Mr. l'Acad. Severguine.*

Le 12 Avril. Sur les listes des mariages, des naissances et des morts à St. Petersbourg. Quatrième mémoire; *par Mr. l'Acad. Krafft.*

— — — Essai sur les nombres premiers; *par le même.*

Le 19 Avril. Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem; *par Mr. l'Acad. Fuss.*

— — — De Polygonis symmetrice-irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis; *par le même.*

Le 26 Avril. Von den nächsten und entfernten chemischen Bestandtheilen des Pflanzenreichs. Dritte Abtheilung. Von den Pflanzen-Säuren und sauren Salzen; *par Mr l'Acad. Georgi.*

Le

Le 26 Avril. Notice d'une pierre calcaire phosphorique des environs de la Forteresse Sanarskaya; *par Mr. l'Acad. Severguine.*

Le 30 Avril. Bericht über den Gang der Witterung, desselben Resultate, und die physischen und medicinischen daraus entstandenen Vorfälle im Gouvernement Wologda insbesondre; *par Mr. le Conseiller de Cour et Correspondant Fries.*

Le 7 Mai. Observation sur une discussion relative à la Théorie de la résistance des milieux; *par Mr. Trembley.*

Le 24 Mai. Integratio formulae differentialis exponentialis; *par Mr. le Chev. de Mélanderhielm.*

Le 24 Mai. Déscription de la celèbre mine de Zméof aux monts d'Altaï en Sibirie; *par Mr. l'Acad. Hermann.*

Le 4 Juin. Sad Varmen. Til Videnskabs Akademiet i Petersborg; *par Mr. Fester.*

Le 28 Juin. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet; *par Mr. l'Acad. Fuſs.*

Le 13 Août. Essai sur les équations. Premier mémoire. Sur l'élimination; *par Mr. le Comte de Tredern.*

— — — Sur le caractère d'Alexandre le Grand; *par Mr. Gädike.*

— — — De transitu Mercurii per Solem 1799; *par Mr. l'Académicien Roumovski.*

Le 24 Septembre. De methodo universali integrandi; *par Mr. le Docteur Murrhard.*

— — — Remarques sur l'élimination des inconnues de quelques équations singulières; *par le même.*

— — — Investigatio formularum localium potentiarum serierum sinuum cosinuum aliarumque functionum trigonometricarum, atque reductio hujus problematis ad problema universale productorum; *par le même.*

— — — Solutio quorundam problematum ad calculum integralem pertinentium *par le même.*

Le 27 Septembre. Observations des eclipses des Satellites de Jupiter, faites à Mitau; *par Mr. le Prof. Beitler.*

Le 8 Octobre. Essai historique sur les relations du commerce entre la Russie et l'Inde; *par Mr. l'Assesseur Storch.*

Le 8 Octobre. Recherche de l'équation de condition entre les coëfficiens de plusieurs équations du premier degré, *par Mr. le Comte de Tredern.*

Le 15 Octobre. Mathematische, physische, oeconomische und medicinische Resultate, gezogen aus mehreren Sammlungen und Beobachtungen über die physische Topographie des Gouvernements Wologda; *par Mr. le Cons. de Cour Fries.*

— — — Berechnungen und Resultate der Witterungs-Beobachtungen in Wologda, vom Herbst-Aequinoctium 1797 bis zu dem von 1798; *par le même.*

Le 25 Octobre. De evolutione sectionum cylindri; *par Mr. l'Acad. Schubert.*

Le 5 Novembre. Observations sur quelques objets d'Analyse dont l'usage peut être utile dans diverses circonstances; *par Mr. le Comte de Tredern.*

Le 26 Novembre. Extrait des observations météorologiques, faites à Moscou en 1797; *par Mr. Stritter.*

Le 29 Novembre. Solution de quelques problèmes remarquables de l'Analyse indéterminée; *par Mr. le Cons. de Cour Kausler.*

Le 10 Décembre. Mirabil. Jalapparum hybridarum ulterius continuata descriptio; *par Mr. le Cons. Kölreuter.*

V.

Mémoires lus dans les Séances académiques.

Lectures en 1797.

Le 12 Janvier. Mr. l'Adjoint *Gourieff*:

Опытъ о постановленіи Математики, на твердыхъ основаніяхъ.

Le 26 Janvier. Mr. l'Académicien *Euler*:

Extrait des observations météorologiques, faites à St. Petersbourg en 1796.

Le 2 *Mars.* Mr. l'Académicien *Roumovski*:
Determinatio differentiae meridianorum Petropolis, Gothae et Lilienthal, ex occultatione binarum stellarum ♉ tauri a luna.

Le 16 *Mars.* Mr. l'Académicien *Lepechin*:
Senecionis nova Species.

Le 23 *Mars.* Mr. l'Académicien *Krafft*:
Sur les plus grandes portées des pièces d'Artillerie, eu égard à la résistance de l'air.

Le 4 *Mai.* Mr. l'Académicien *Fuſs*:
Recherches sur quelques cas d'équilibre, dans les fils parfaitement flexibles.

Le 18 *Mai.* Mr. l'Académicien *Hermann*:
Mémoire sur l'exploitation des mines de l'Empire de Russie.

Le 1 *Juin.* Mr. l'Académicien *Severguine*:
Первыя основанія Минералогіи.

Le 8 *Juin.* Mr. l'Académicien *Lowitz*:
Methodus nova potassinum carbonicum plene saturatum obtinendi.

Le 12 *Juin.* Mr. l'Académicien *Hermann*:
Beschreibung der Sibirischen Berg- und Hüttenwerke und der daselbst üblichen Schmelzprocesse.

Le 15 *Juin.* Mr. l'Académicien *Henry*:
1) Resultats des calculs de la conjonction de Saturne et de la lune, deduite de l'occultation de Saturne par la lune, observée le 2 Avril 1797.
2) De la réduction du vrai lieu d'un astre à son lieu apparent, ou formules des parallaxes.

Le 22 *Juin*: Mr. le Professeur *Zakharoff*:
Sur la maniere la plus facile et la plus promte de préparer l'acide nitreux le plus pur et le plus fort.

Le 26 *Juin.* Mr. l'Académicien *Hermann.*
Mineralogische Reisen. IVte Abtheilung 2ter Abschnitt, welcher die Beschreibung der Eisenbergwerke enthält.

Le 6 Juillet. Mr. le Comte de *Mousin-Pouchkin*:

Sur une nouvelle méthode de crystalliser les régules d'or et d'argent.

— — — Mr. l'Académicien *Severguine*:

La continuation de sa Minéralogie.

Le 17 Août. Mr. l'Adjoint *Gourieff*:

Mémoire sur les principaux problèmes qu'on peut proposer sur les courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe.

Le 24 Août. Mr l'Académicien *Euler*:

Extrait des observations météorologiques, faites à Moscou en 1793 — 1796, par Mr. Stritter.

Le 31 Août. Mr l'Académicien *Roumovski*:

Tentamen investigandi parallaxin Lunae ex eclipsi Solis, quae contigit anno 1793.

Le 21 Septembre. Mr l'Académicien *Lepechin*:

Observations botaniques sur l'usage du Nerprun, Rhamnus catharcticus Linn.

Le 28 Septembre. Mr. l'Académicien *Krafft*:

1) Etat rédigé des tables de population de la ville de St Pétersbourg, pour la période depuis 1791 jusqu'à l'avènement au Thrône de S. M. l'Empéreur *Paul I.*

2) Bemerkung eines allgemeinen Gesetzes der Primzahlen.

Le 5 Octobre. Mr. l'Académicien *Ozèretskovski*:

Observationes de Salmone salare Oceani septentrionalis.

Le 26 Octobre. Mr l'Académicien *Fuss*:

De motu baculi super plano inclinato, cui insistit, descendentis.

Le 2 Novembre. Mr. l'Académicien *Schubert*:

Trigonometria sphaerica e Ptolemaeo.

— — — Mr l'Académicien *Henry*:

Sur un phénomène d'Optique observé par Mr. Beitler à Mitau.

Le 9 Novembre. Mr l'Académicien *Hermann*:

Déscription de la Topaze de Sibérie.

Le

Le 16 Novembre. Mr. l'Académicien *Severguine* :
La continuation de sa Minéralogie.

Le 23 Novembre. Mr. l'Académicien *Lowitz* :
Notice sur la crystallisation de 91 espèces de sels tant simples que composés.

Lectures en 1798.

Le 11 Janvier. Mr. le Professeur *Zakharoff* :
О сосудѣ в ду сквозь себя непропускающемъ.

Le 29 Janvier. Mr. l'Adjoint *Gourieff* :
Mémoire sur la plus rigoureuse démonstration d'un théorème fondamental des équations de condition de la différentielle exacte, et du calcul des variations.

Le 15 Fevrier. Mr. l'Académicien *Euler* :
Histoire de l'Académie *Impériale* des Sciences de St. Pétersbourg. Année 1793.

Le 26 Fevrier. Mr. l'Académicien *Lowitz* :
Anzeige einer neuen Methode die Salze zu untersuchen.

Le 12 Mars. Mr l'Académicien *Severguine.*
Notice d'une crystallisation curieuse de l'Hématite compacte brun de Kamensk.

Le 15 Mars Mr. l'Académicien *L pechin* :
Typha Laxmanni descripta.

Le 12 Avril Mr l'Académicien *Krafft* :
Sur les listes des mariages, des naissances et des morts à St. Pétersbourg. Quatrième mémoire.

Le 19 Avril. Mr l'Académicien *Ozeretskovski* :
De lacte vaccino et caprino

Le 26 Avril. Mr l'Académicien *Severguine.*
Notice sur une pierre calcaire phosphorique des environs de la fortresse Sanarskaya et de Catherinebourg.

Le

Le 3 Mai. Mr. l'Académicien *Fuss*:

De resolutione formulae $\int x^{m-1} \partial x \, (\Delta + x_n)^{\lambda}$ in seriem semper convergentem, ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur.

Le 14 Mai. Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Exposé des expériences chymiques faites sur le Spath de plomb rouge.

Le 24 Mai. Mr l'Académicien *Schubert*:

Problemata ex doctrina sphaerica.

Le 31 Mai. Mr. l'Académicien *Hermann*:

Déscription de la célèbre minière d'argent de Zméof aux monts d'Altaï.

Le 7 Juin. Mr. l'Académicien *Severguine*:

Observationes quaedam circa lapides calcareos.

Le 14 Juin. Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Methodi novae acidum tartaricum omne e tartaro crudo perfecte extricandi expositio.

Le 21 Juin. Mr. l'Académicien *Henry*:

1) Observations de quelques étoiles qui culminent à peu de distance du zénith, pour servir à vérifier la hauteur du pole de l'Observatoire de l'Académie *Impériale* des Sciences.

2) Observations de Venus, faites à l'Observatoire de l'Académie *Impériale* des Sciences, vers le tems de la plus grande digression occidentale de cette planète.

Le 5 Juillet. Mr. l'Académicien *Gourieff*:

Изслѣдованіе о мѣрѣ силъ ускоренныхъ.

Le 6 Septembre. Mr l'Adjoint *Busse*:

Notitiae praeviae rerum, quas Numophylacium academicum aut in Sibiria, aut ad Volgam, aut in Russia nova subter terra inventas asservat.

Le 13 Septembre. Mr l'Académicien *Euler*:

Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg. Année 1797.

Le

Le 27 Septembre. Mr. l'Académicien *Roumovski*:
De transitu Mercurii per Solem anno 1799 die 26 Aprilis Petropoli expectando.

Le 11 Octobre. Mr. l'Académicien *Lepechin*:
Alca Kamtschatica.

Le 18 Octobre. Mr. l'Académicien *Krafft*:
Zusatz zu meiner letzten Abhandlung über die Bestimmung der geographischen Länge zur See, aus beobachteten Monds-Distanzen.

Le 25 Octobre. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*:
De ovo perforato.

Le 15 Novembre. Mr. l'Académicien *Fuss*:
Summatio plurium serierum ex simbus et cosinibus angulorum arithmetice progredientium formatarum.

Le 22 Novembre. Mr. l'Académicien *Schubert*:
De evolutione sectionum cylindri.

Le 29 Novembre. Mr. l'Académicien *Hermann*:
Expériences sur l'acier damascé.

Le 20 Décembre. Mr. l'Académicien *Severguine*:
Histoire naturelle des Géodes.

VI.

Observations, expériences, et notices intéressantes, faites et communiquées à l'Académie.

I. Amalgamation du platine et dépuration du phosphore.

Le 13 Mars 1797 S. E. Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin*, Vice Président du Collège des Mines, communiqua à l'Académie deux découvertes chymiques qu'il avoit fai-

faites depuis peu, la premiere d'une amalgamation parfaite du platine, opérée au moyen de la précipitation de sa solution dans de l'eau régale; l'autre: d'une méthode de raffiner ou de dépurer le phosphore et de le rendre parfaitement transparent et blanc. La notice détaillée de S. E. se trouve dans la partie historique du Tome X. des Nova Acta.

II. Décomposition de l'acide carbonique par la voye humide.

Le 20 Mars 1797 le même Seigneur communiqua à l'Académie la notice d'une nouvelle expérience sur la décomposition de l'acide carbonique par la voye humide, Mr. le Comte, en faisant bouillir une solution de carbonate d'alcali végétal, sursaturé d'acide d'après la méthode de Mr. *Lowitz*, sur du phosphore dépuré d'après sa propre méthode, en a obtenu un charbon très ostensible. L'expérience fut repetée en plaine séance par Mr. l'Académicien *Lowitz*, et réussit parfaitement.

III. Production de cinabre par la voye humide.

Le 5 Juin 1797. Mr. l'Apothicaire *Kirchhoff*, Successeur de Mr. *Lowitz* au Laboratoire du Collège de Médecine, fit communiquer à l'Académie, par Mr. *Lowitz*, une nouvelle découverte qu'il a faite, en produisant, par la voye humide, en très peu de tems, du cinabre d'une très belle couleur. Voici le procédé: On fait cuire 300 grains de Mercure, 50 grains de fleurs de soufre et 40 à 60 grains d'alcali végétal, le tout bien broyé, dans une tasse de por-

porcelaine, avec tant d'eau que la masse en prenne la consistance d'un syrop, en réparant la perte de l'eau qui s'évapore, par d'autre qu'on y verse de tems en tems. Dès que le mercure est entièrement amorti, on presse la masse qui est aprésent noire et d'une plus grande consistance, contre le fond du vase, et on fait évaporer tout ce qui y est resté d'humidité. La masse ayant obtenu sur toute sa surface une couleur de brique, on y verse, petit-à-petit, autant d'eau qu'il en faut pour lui donner derechef la consistance d'un syrop, et on la fait cuire de nouveau, jusqu'à ce que la beauté de la couleur n'augmente plus, après quoi on édulcore avec de l'eau chaude le cinabre engendré.

Mr. l'Académicien *Lowitz* ayant repété lui-même le procédé de Mr. *Kirchhoff*, il ne doute pas que sa méthode ne soit applicable en grand, et il s'en promet des avantages considérables dans la pharmacie.

IV. Phénomène d'Optique remarquable.

Le 7 Septembre 1797 Mr. le Professeur *Beitler* à Mitau communiqua à l'Académie un phénomène singulier. Dans la nuit du 22 au 23 Août il avoit observé l'immersion du second satellite de Jupiter. Avant l'observation il voulut essayer un diaphragme posé sur son objectiv. Contemplant la planète de l'oeil droit obliquement vers le bord gauche du champ apparent de sa lunette, il ouvrit par hazard l'oeil gauche et vit tout-de-suite très distinctement la planète comme projettée sur le parois blanchi de la chambre qui étoit vis-à-vis de lui et fortement

éclairé par une bougie allumée, placée derrière l'observateur. Mr. *Beitler* pense qu'une telle apparition, facile à produire toutes les fois qu'on le voudra, pourroit servir à déterminer le diamètre apparent d'une planète, au moyen de l'angle optique connu, avec la distance de l'oeil à l'image projettée.

V. Crystallisation métallique du platine:

Le 19 Février 1798 S. E. Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin* communiqua à l'Académie la notice d'une nouvelle crystallisation métallique du platine et d'un sel tiré d'une dissolution de ce métal dans une eau régale composée. Cette notice contenoit ce qui suit:

„J'ai l'honneur de mettre sous les yeux de l'Académie un „nouveau sel de Platine, ainsi qu'une crystallisation „métallique de ce métal si intéressant et si peu connu „encore relativement à ses propriétés chymiques. Occupé „depuis quelques mois, dans les momens où mes devoirs „me le permettent, d'un travail assez étendu sur ce „corps métallique: j'espère dans peu donner un premier „mémoire, qui rendra compte d'une partie de mes ex„périences, et qui traitera amplement de ces deux „nouveaux produits. Je me bornerai aujourd'hui, en tra„çant le détail de leur production, de réclamer un in„stant l'attention de l'Académie sur quelques uns de „leurs caractères.

La

„* La crystallisation métallique de la platine a été obte-
„nue, en traitant, devant un souflet de forge, le vitriol
„de platine par le muriate de soude ou sel culinaire.
„Cette expérience, qui est très délicate, ne m'a réussi
„encore qu'une seule fois. Il faut que la matière n'éprouve
„qu'un feu suffisant, pour que la platine reduite forme
„une pellicule uniforme et très brillante dans le milieu
„du creuset. Si le feu est plus fort, le métal se ras-
„semble en dendrites au fond du creuset, et la crystalli-
„sation est manquée. Un feu trop foible, au contraire,
„ne réduiroit pas complettement la platine, et ne suf-
„firoit pas non plus à la décomposition des deux sels.
„Ces crystaux, qui sont déjà très ostensibles à l'oeil nud,
„sont vus par l'oeil armé de la manière la plus distincte,
„et forment des prismes rhomboïdaux, ainsi que des
„tablettes également rhomboïdales, qui, étant coupées
„à une de leurs extrémités, ou bien à toutes les deux,
„deviennent aussi quelques fois des tablettes pentaë-
„dres irrégulières, ou des hexaëdres très réguliers. Les
„prismes sont souvent réunis à leur bases et au pre-
„mier coup-d'oeil égalent en beauté les crystallisations
„les plus délicates de l'antimoine aiguilleuse. Tous
„ces crystaux tapissent en quantité innombrable la sur-
„face intérieure de la pellicule de platine qui paroît
„très pure et très malléable, quoique traitée au chalu-
„meau

* La crystallisation de platine obtenue par Mr. le Comte de *Buffon*, ainsi que celle dont Morveau donne la figure dans le XIII. Volume du Journal de Rozier, sont très différentes de la mienne, étant toutes les deux le produit de la fusion, tandis que la mienne est incontestablement produite par la sublimation.

„meau sur les parois d'un creuset, il semble se former „autour d'elle une zone saline très legère, qui n'est „duë probablement qu'à une petite quantité de sel „culinaire mécaniquement attaché à la surface de la „pellicule de platine. La rupture de cette pellicule a „ployé plusieurs des crystaux, comme on le voit fort „bien au microscope, ce qui ne seroit pas arrivé, si ces „crystaux n'étoient pas malléables. Il est assez difficile „d'expliquer cette crystallisation, qui est évidemment „le produit de la sublimation, quand il s'agit d'un „métal aussi réfractaire et aussi fixe que la platine.

„Si l'on fait dissoudre une partie de platine dans une eau „régale, composée de quatre parties de sel marin, de „cinq parties d'acide nitreux et de trois parties d'eau; „que cette dissolution se fasse dans une cornue munie „d'un récipient, à l'aide d'un bon bain de sable, et „qu'on laisse refroidir lentement la cornue, lorsque „trois ou quatre parties du fluide ont passé dans le „récipient, on trouve en décantant la dissolution, le sel „que j'ai l'honneur de présenter à l'inspection de l'Aca- „démie. Selon la quantité de platine employée, les „crystaux prismatiques ont d'un demi pouce à plus de „quatre pouces de longueur. Leur largeur et leur épais- „seur varient également; les plus forts ont au delà de „deux lignes et demie de largeur, leur épaisseur est „moindre. Il sont du plus beau nacarat, et quelques „fois ont la couleur du Schörl rouge d'Hongrie. Les „crystaux très minces tirent sur le jaune; leur figure, qui „est rarement régulière, est le prisme tétraëdre à an- „gles droits; les deux extrémités acérées par une py- „ramide

„ramide également tétraëdre et tronquée à son sommet. „Ces crystaux sont composés de feuillets extrêmement „minces appliqués les uns sur les autres. Ces feuillets „forment quelques fois des lames héxaëdres, implantées „de manière à ne laisser apperçevoir que quatre côtés; „l'union de deux de ces lames, réunies à leurs bases, „divergentes à leurs sommets, et se trouvant dans le même „plan, forment aussi, soit des crystaux aîlés ressem- „blant assez aux semences d'Erable, ou des triangles „isoscèles, implantés par leurs sommets, et dont les deux „angles supérieurs, étant coupés en sens contraire, en „font des pentagones irréguliers. Un caractère essentiel „de ce nouveau sel est son extrême solubilité, ce qui „le distingue éminemment de tous les sels de platine „jusqu'ici connus. Deux parties et $\frac{3}{4}$ d'eau froide suffisent „pour en dissoudre une de ce sel; l'eau bouillante le „dissoût dans la proportion de un et $\frac{1}{4}$ à un *. Il „se distingue encore par son goût qui n'est qu'à peine „métallique, et paroît être presque dégagé de fer. Des „expériences décisives de Monsieur de *Lowitz* le „mettent au rang des sels triples, et ses parties consti- „tuantes sont: l'acide marin, le Natron ou Soude et la „platine. Ce qui le rend d'autent plus intéressant c'est „que la faculté de précipiter la platine de ses disso- „lutions a été refusée par l'illustre *Bergmann* à l'alcali „minéral; et quoique des Chymistes modernes ayent con-

„staté

---

* Ce sel contient à peu près vingt et une parties et six-dixièmes de platine réduite sur cent parties de sel, qui n'est pas encore privé de son eau de crystallisation.

„staté la précipitation, ce n'a jamais été comme sel „triple, ainsi que les précipités par le kali et par „l'ammoniaque.

Le Comte Apollos Moussin-Poushkin.

Les échantillons qui accompagnèrent cette notice furent trouvés très beaux et supérieurs par leur régularité aux crystallisations obtenues autrefois par Mr. le Comte de *Buffon* et Mr. de *Morveau*. Mr. l'Académicien *Lowitz* exposa à cette occasion un régule d'Antimoine crystallisé très beau et très bien prononcé.

VI. Crystallisation curieuse de l'Hématite compacte brun de Kamensk'.

Le 12 Mars 1798 Mr. l'Académicien *Severguine* présenta et lut à l'Académie la notice suivante:

„J'ai l'honneur d'annoncer à l'Académie des Sciences une „crystallisation curieuse de l'Hématite compacte brun „de Kamensk, que j'ai observée nouvellement, en fai- „sant la déscription de quelques minéraux de Sibérie. „Cette mine de fer est de la même nature avec celle „qui a été nommée *Ferrum ochraceum brunum densum* „par Mr. *Wiedenmann* et *Karsten*. Mais ces deux célè- „bres Minéralogistes, qui ont décrit avec tant de saga- „cité les différentes figures de cette mine, quant à la „crystallisation, ne font mention que du Cube * et du „rhom

* V. Karſten, Beſchreibung des Leſkiſchen Mineralien-Kabinets. Part. II. pag. 62.

„rhombe,* ainsi que Mr. *Macquart* ne fait mention que „de la forme stalactitique de cette mine **. La mienne „a la figure de la pyramide triëdre allongée, qui a en„core ceci de remarquable, qu'elle est creuse en dedans, „ou remplie d'ochre ferrugineuse jaune. La masse en„tière est un hématite strié et en partie réniforme, „plein de cavités et ochreux, contenant par-ci par-là „les crystaux mentionnés qui, étant brisés, ou dégagés, „laissent des petites cavités creuses, et font que cette „mine semble être celluleuse, avec des cellules trian„gulaires, dans les endroits où ces pyramides ont été „détachées ou rompuës Je me rappelle d'avoir vû une „crystallisation semblable de la pierre de corne [*Horn„stein*] brune; mais comme la mienne ne donne pas „même des étincelles au briquet, elle en est tout-à„fait différente; ainsi elle ne peut pas même être „comptée au nombre des spaths calcaires ferrugineux „de la même figure, parcequ'elle ne fait aucune effer„vescence avec les acides, et ne participe guères de la „nature calcaire. Il semble que cette crystallisation a „remplacé la forme stalactitique que cette mine ten„doit à prendre primitivement. Au reste j'aurai l'hon„neur de présenter une autre fois mes idées sur ces „sortes de crystallisations.

l'Académicien Severguine.

---

* Wiedemann, Handbuch des oryktognostischen Theils der Mineralogie.

** Essays ou recueil de mémoires sur plusieurs points de Minéralogie, Paris 1789.

VII. Pierre calcaire phosphorique des environs de Sanara et de Catherinebourg.

Le 26 Avril 1798 Mr. l'Académicien *Severguine* anonça à l'Académie la découverte qu'il avoit faite nouvellement d'une substance très remarquable, par une notice qui contenoit ce qui suit:

„Il y a déjà longtems, et plus de trois ans, que j'ai obtenu „quelques échantillons de pierres calcaires, l'une des „environs de Sanara, l'autre de Catherinebourg. „Comme elles faisoient effervescence avec les acides, et „qu'elles avoient l'air grenu et un peu spathique à „particules luisantes, joint à une couleur blanche, je les „avois mis alors parmi les marbres salins, *Marmo Salino* des „Italiens, Saliniſcher Marmor. Mais après avoir reduit en „poudre un petit morceau d'un de ces échantillons, pour „en faire quelques épreuves au feu, et en avoir mis sur „des charbons ardens, il y pétilloit à la manière des „spaths, et produisoit tantôt une lueur verte phospho„rique, tout-à-fait comme le Chlorophane, que j'ai re„trouvé parmis les minéraux Russes, d'après la descrip„tion que le célèbre M. de *Crell* en a faite, et sur le„quel j'ai eu l'honneur de présenter une dissertation „particuliere. Cette pierre a par-ci par-là des tâches „rondes bleues, qui proviennent du bleu de cuivre; „mais ce sont les parties de la pierre les plus grenues „et blanches qui produisent cet effet phosphorique le „plus fortement. Comme le Phosphate calcaire naturel „que M. *Proust* a découvert en Estremadure en Espagne, „a les mêmes propriétés, de produire une lueur phos-

„pho-

„phorique verte dans la chaleur, il faut présumer que „cette pierre calcaire de Sanara et de Catherinebourg „contient pareillement de l'acide phosphorique en com- „binaison, mais desorte que le phosphate calcaire est „mêlé mécaniquement avec le carbonate calcaire, qui est „cause que cette pierre fait effervescence avec les acides. „Il seroit à désirer que les Minéralogistes retouchassent „plusieurs de ces marbres que l'on nomme salins ou „grenus, pour faire les mêmes expériences. Et si „on parvient à trouver que ceux des autres contrées „contiennent pareillement des particules du phosphate „calcaire naturel, l'idée de l'ancienneté de leur forma- „tion perdra beaucoup de son poids. —

„J'aurai l'honneur de présenter une dissertation particu- „liere sur cette substance, quand le tour de lire sera à „moi. Il faut cependant que j'ajoute que la pierre „calcaire grenue phosphorique se distingue du marbre „salin des autres contrées que j'avois pris pour les mê- „mes expériences, et qui n'avoit pas la propriété phos- „phorique comme celle de Sanara, parcequ'elle est „moins dure et qu'elle ressemble plutôt à un grés as- „sez mou et cassant.

B. Severguine.

VIII. Crystallisation métallique du cuivre.

Le 3 Mai 1798 S. E. Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin* annonça à l'Académie, par une lettre adressée à Mr. l'Académicien *Lowitz*, une nouvelle crystallisation mé-

tallique qui lui a réussi par la voye sêche, et nommément celle du cuivre, dont Mr. le Comte envoya en même tems un échantillon qui, vu par le microscope, présente le métal sous la forme de crystaux plumeux, formant pour la plûpart des faisceaux étoilés et luisans.

IX. Découverte du Chromium dans un fossile de la Sibérie.

Le 14 Mai Mr. l'Académicien *Lowitz* lut un exposé des expériences chymiques qu'il a faites sur le spath de plomb rouge. Ces expériences vérifient non seulement l'existence d'un nouveau demi-métal que Mr. *Vauquelin* y a découvert, il y a quelque tems, et qu'il a nommé Chromium; mais elles ont fourni à Mr. *Lowitz* l'occasion de découvrir ce même demi-métal dans un autre fossile nouvellement trouvé sur les bords de la riviere Viasga en Sibérie, qui lui avoit été donné par S. E Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin*. Ce fossile est très dur, d'un noir éclatant, et traversé, en diverses directions, de veines très-fines d'une espèce de Stéatite. Mr *Lowitz* fit voir en même tems quelques solutions et précipitations de ce nouveau demi-métal.

X. Crystallisations métalliques obtenues du phosphate de cuivre.

Le 2 Juillet 1798 S. E. Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin* envoya, pour être présentées à l'Académie deux nouvelles crystallisations métalliques obtenues par la voye sêche, du phosphate de cuivre. La pr miere, en tablettes, est un produit du carbonate de cuivre saturé d'acide phos-

phorique et tenu en fusion pendant 15 minutes de tems : elle n'est crystallisée qu'à la surface de sa couche supérieure qui est verte. L'autre a été obtenue pareillement par la fusion d'une portion de phosphate de cuivre, devant un feu de forge continué pendant une demi-heure. Les crystaux, qui ressemblent à une véritable minéralisation, sont en aiguilles, ou prismatiques, transparens dans certaines directions et assez semblables au cuivre rouge vitreux de Sibérie.

XI. Méthode très simple d'obtenir l'huile d'oeuf.

Le 9 Juillet Mr. *Allegretti*, Chirurgien Major et Inspecteur de la maison d'inoculation à Ishora, communiqua à l'Académie, une méthode très-simple d'obtenir l'huile des oeufs, sans l'emploi du feu et en moins d'une demi-heure. Cette méthode consiste 1°) à bien broyer ensemble trois onzes d'Alcohol avec le jaune de douze oeufs frais; 2°) de mettre le mélange dans une cornue propre à contenir quatre livres de fluide; 3°) à le délayer, tout en le rémuant fortement, de tant d'eau que la cornue en soit remplie jusqu'au col. Après un quart d'heure, ou une demi-heure tout au plus, l'huile surnage au mélange. Mr. l'Académicien *Lowitz*, en suivant exactement ce procédé proposé par Mr. *Allegretti*, a obtenu en moins d'une demi-heure cinq dragmes d'huile de cinq oeufs frais. Chardelier a fait des expériences sur la séparation de l'huile d'oeuf, mais il lui a falu huit à neuf jours pour son opération, et il employe l'alun, dont l'addition pourroit bien n'être pas tout-à-fait innocente.

XII. Tremblement de terre.

Le 20 Août 1798 le Collège des mines communiqua à l'Académie le rapport du Chef de la Régence des Mines de Cathérinenbourg, qui fait mention d'un tremblement de terre, précédé d'un bruit soûterrain, qui s'est fait sentir plus ou moins fortement, et avec des sécousses plus ou moins repétées, dans une grande étendue de pays, savoir depuis Perm, dans la direction du Sud-Ouest au Nord-Est jusqu'à une distance de 500 Verstes en longueur, au-de-là des monts d'Oural, sur une largeur de 150 Verstes, à compter de Cathérinebourg du Sud-Est au Nord-Ouest. On ajoute que ce tremblement de terre, qui dans les endroits, où il s'est manifesté avec le plus de force, n'a causé d'autres dommages que de casser des vîtres et renverser des tuyaux de chéminée, est remarquable uniquement à cause de la rareté de ce phenomène dans ces contrées, vû que dans l'espace de soixante ans il n'y a point été observé.

XIII. Titanium trouvé dans un minerai des monts d'Oural en Sibérie.

Le 15 Octobre 1798 Mr. l'Académicien *Lowitz* exposa deux échantillons d'une mine du nouveau métal nommé Titanium, que Mr. le Professeur *Klaproth* à Berlin a découvert, d'abord dans le Schörl rouge d'Hongrie, et ensuite dans plusieurs autres fossiles d'Espagne, de France et d'Angleterre. Mr. *Lowitz* ayant analysé quelques morceaux d'un nouveau minérai exploité aux monts Ourals en Sibérie, il a trouvé qu'il contient sur cent parties 53 par-

parties de Titanium et 47 parties de fer, sa pesanteur spécifique étant 4,6732.

XIV. Crystallisation de l'acide phosphorique parfaitement dépuré.

Le 29 Octobre 1793 Mr l'Académicien *Lowitz* rapporta à la Conférence académique qu'il a réussi enfin, après plusieurs tentatives, à crystalliser l'acide phosphorique parfaitement dépuré, ce que jusqu'ici les Chymistes avoient cru être impossible. Pour effectuer cette crystallisation, on n'a qu'à faire évaporer doucement cet acide jusqu'à la consistence d'un Syrop, et le laisser se reposer ensuite tranquillement dans le froid pendant quelques semaines.

XV. Détonnation des nitrates mêlés de phosphore.

Le 3 Novembre 1798 S. E. Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin* fit, en présence de plusieurs Académiens, quelques expériences très-intéressantes sur la propriété remarquable découverte par Mr. *Brugnatelli*, dans différens nitrates, qui détonnent avec éclat, lorsque mêlés avec un peu de phosphore, on les met sur une enclume et qu'on y donne un coup de marteau. Mr. le Comte s'attacha principalement aux expériences faites avec les nitrates d'ammoniaque, d'argent et de mercure. Les deux derniers sels métalliques, surtout le nitrate de mercure, quoiqu'on n'en prit pour chaque expérience qu'un dragme avec 4 à 6 grains de phosphore, produisirent des explosions semblables

bles à un coup de fusil. Il étoit remarquable que le nitrate d'ammoniaque tout seul, sans y mêler du phosphore, produisoit le même effet, seulement tant-soit-peu plus foible.

VII.

Rapports présentés à l'Académie par des Académiciens chargés de commissions particulières.

I. Sur une cochenille indigène.

Le 19 Juin 1797 l'Académie reçut cinq livres de cochenille cueillie à Smeinogorskaya, accompagnés d'une lettre, adressée à Mr. le Directeur, par S. E. Mr. le Conseiller privé et Chevalier *Danaouroff* qui, au nom du Cabinet *Impérial*, demanda que cette cochenille indigène, envoyée de Kolyvan, fut examinée à l'Académie. Mrs. les Académiciens *Lowitz* et *Zakharoff* furent chargés de cet examen. D'après le rapport du premier, lû le 22 Juin, la cochenille de Sibérie, envoyée au Cabinet de *Sa Majeste*, n'a pas été sêchée d'une maniere convenable d'abord après la recolte; elle a subi une espèce de fermentation, comme le prouve l'odeur fétide extrêmement désagréable qu'elle exhale. Dans cet état de corruption presque la moitié consiste en une expèce de graisse qui est cause que la décoction fort trouble de cette cochenille ne se clarifie qu'après une filtration extrêmement longue et souvent repétée. La couleur de cette décoction est d'un brun tirant sur le jaune. Par une addition d'alun elle s'approche cependant de la couleur de la cochenille étrangere.

Quant

Quant à la substance colorante, elle est dans cette cochenille à celle de la cochenille étrangère comme 1 à 25. Mr. *Lowitz* a teint du drap et de la soye avec de la cochenille étrangère et aussi avec celle de Kolyvan, moyennant la solution d'étain, mais la derniere a donné constamment, surtout au drap, une couleur tirant sur le jaune. De tout cela il résulte que cette cochenille, dans l'état de corruption où elle se trouve, ne peut être d'aucun usage, et que, pour bien juger de la qualité de cette cochenille indigène, il est indispensable de s'en procurer une portion fraiche et sêchée avec soin. Le rapport de Mr. l'Académicien *Zakharoff*, lû le 26 Juin, contenoit à-peu-prés les mêmes résultats. Le 10 Juillet Mr. l'Académicien *Lowitz* exposa encore plusieurs échantillons de drap et d'autres étoffes teintes par différens procédés avec la cochenille de Kolyvan, en y employant l'alun, le tartre, la solution d'étain etc., tant combinés ensemble que séparément.

II. Sur quelques projets hydrauliques.

Le 13 Novembre 1797 Mrs. les Académiciens *Roumovski*, *Euler*, *Krafft*, *Fuſs* et Mr. l'Adjoint *Gourieff*, nommés pour examiner différens projets présentés à *Sa Majesté l'Empéreur* par un marchand de Novorossiiskaja (Ekathérinoslav, nommé Bykoff-Poznäkoff, et sur lesquels le Souverain demandoit le jugement du Collège de l'Amirauté et celui de l'Académie des Sciences, communiquèrent à la Conférence les résultats de leurs déliberations, tels qu'il les avoient présentés au dit Collège, dans sa séance du 31 Octobre, à laquelle ils avoient été invités d'assister.

Les

Les projets qu'il s'étoit agi d'examiner furent au nombre de cinq, savoir: 1°) Un habillement complet de plongeur, avec une machine, pour faciliter la réspiration à plusieurs plongeurs à la fois et les mettre en état de travailler plusieurs heures de suite au fond de l'eau; 2°) une machine pour élever l'eau à une hauteur de trois-cens archines; 3°) un moyen de chasser les vers du port de Sevastopol; 4°) un bassin pour y faire hyverner les vaisseaux à sec, et un autre pour les réparer, sans avoir besoin de machines pour saigner le bassin; 5°) un moyen de rendre le Dnepr navigable.

Quant au premier projet le Comité observa dans son rapport que ni l'habillement des plongeurs, ni la manière de leur faire parvenir de l'air frais, sont des idées absolument neuves. Il indiqua les ouvrages, où l'on trouve la déscription de l'un et de l'autre.

Le second projet est une application connüe de la pompe aspirante et foulante; mais le Comité fit voir, dans son rapport, qu'il s'en faut de beaucoup qu'une machine construite selon le plan de Mr. *Bykoff* puisse produire un effet aussi grand qu'il s'en promet; vu que le calcul donne, même sous les suppositions les plus avantageuses, une hauteur de cent pieds tout au plus, à laquelle l'eau pourroit être élevée.

Quant au troisième projet de chasser les vers du port de Sevastopol, en séparant l'eau de la baye, qui la reçoit d'une petite riviere, de l'eau de la mer, par une muraille percée d'ouvertures, le rapport dit que, supposé que les vers nuisibles aux vaisseaux ne vivent que dans l'eau de

de mer, il faut de deux choses l'une : ou que cette eau ne se mêle pas avec l'eau douce de la baye, et dans ce cas les vaisseaux sont dans le port même à l'abri des vers, sans qu'il soit besoin de construire une muraille ; ou bien l'eau de mer se mêle avec l'eau douce de la baye et dans ce cas la muraille percée d'ouvertures n'empechera pas ce mélange et ne pourra pas garantir les vaisseaux contre la déstruction ; et que par conséquent, ce projet, supposé qu'il fut praticable, ne seroit d'aucune utilité pour le but proposé.

Le quatrième projet, quoique practicable envisagé sous un point de vuë général, a paru au Comité d'une exécution extrèmement difficile et dispendieuse. Il laisse aux membres du Collège à décider, s'il seroit utile à la marine de la mer noire, et si les avantages en vaudroient les fraix.

Le cinquième projet, concernant les cataractes du Dnepr, n'étant pas accompagné de plans, ni développé d'une maniere assez claire, il a été impossible d'en porter un jugement solide.

III. Sur une trisection de l'angle et une quadrature du cercle.

Le 4 Décembre 1797 l'Académie avoit reçu une lettre datée de Vienne et adressée à Mrs. les Académiciens par le Rev. Jean Nicolas *Revay*, Prêtre séculier de la Diocèse de Jauer et Professeur au Gymnase Royal de Strigau, qui envoye et soûmet au jugement de l'Académie un ou-

ouvrage intitulé: *Angulorum rectaeque lineae Trisectio et consectaria circuli quadratio, utrumque methodo planissima detexit I. N. Revay, Hungarus Csanadiensis etc. Viennae 1797.* Cette brochure fut donnée à examiner à Mr. l'Académicien *Fuss* qui, le 11 Décembre, en fit à la Conférence le rapport suivant:

L'ouvrage: *Angulorum rectaeque Lineae Trisectio et consectaria circuli quadratio*, envoyé à l'Académie de la part de l'auteur, M. *Nicolas Révay*, Professeur à Gran en Hongrie, a pour objet de résoudre par la Géométrie élémentaire, ou de construire géométriquement, les problèmes suivans:

1°) Triséquer un angle droit;
2°) Triséquer un angle obtus;
3°) Triséquer une ligne droite;
4°) Triséquer un angle de 60 degrés;
5°) Triséquer un angle aigu de plus de 60 degrés;
6°) Triséquer un angle plus petit que 60°;
7°) Construire un Quarré égal à un cercle donnée;
8°) Construire une ligne droite égale à la demi-périphérie d'un Cercle donné.

De tous les problèmes relatifs à la Trisection il n'y a que ceux que chacun sait résoudre, savoir le 1^{r} et 3e, dont la construction soit vraye à la rigueur et démontrée comme il faut. Toutes les autres constructions ne sont que des approximations, qui ont d'autant moins de valeur qu'on a des constructions empiriques incomparablement plus gé-

générales et plus approchantes. Pour ne donner que deux exemples de la justesse des solutions de M. *Révay*, le probleme 4e, §. 36, donne le tiers du milieu d'un angle de 60° = 19°, 50′, 40″ et le problème 2^d, §. 16, donne le tiers du milieu d'un angle de 120° = 44°, 36′. Fautes grossières et intolérables, même dans une approximation.

Le problème 7e, pour la Quadrature du cercle, est résolu de deux manieres différentes. La 1re solution (§. 60.) donne la circonférence d'un cercle dont l'unité est le diamètre, $\pi = 3 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3{,}116518$; la 2de solution (§. 61.) donne $\pi = 3{,}150535$. De la 1re il suivroit que la circonférence d'un cercle est plus petite que le périmètre du XV gone inscrit. De la 2de il suivroit que la circonférence d'un cercle est plus grande que le contour du XXXVI gone circonscrit.

Le problème 8, pour la rectification du cercle est aussi résolu de deux manieres différentes. La 1re solution (§. 62) donne $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1623$; la 2de (§. 63.) donne $\pi = \frac{2(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 3{,}1547$.

Il ne peut pas être question de démontrer des constructions qui donnent de pareils résultats. Cependant chacune de ces constructions est suivie d'un raisonnement que l'auteur appelle sa démonstration, sans se douter même des qualités que doit avoir un raisonnement pour s'élever au rang d'une démonstration géométrique.

Tout ce qu'on peut dire à l'avantage de cet ouvrage, c'est qu'il est fruit du jeu innocent d'un homme

qui aime à s'amuser avec la regle et le compas, et dont la patience infatigable est parvenue, par des essais sans nombre, à résoudre, plus ou moins approchamment, les problèmes 2, 4, 5, 6, 7 et 8; mais qui est dans l'erreur de croire que par des tâtonnemens pratiques de cette nature on puisse découvrir des vérités géométriques.

Nicolas Fuſs.

IV. Conducteurs aux magazins à poudre.

Le 28 Mai 1798 l'expédition de l'Artillerie établie auprès du Collège de Guerre s'étant adressé à l'Académie, pour avoir des instructions plus détaillées au sujet des conducteurs, dont elle se proposoit d'armer les magazins à poudre des fortresses de l'Empire: Mrs. les Académiciens *Roumovski*, *Euler* et *Krafft*, chargés de dresser ces instructions, rapportèrent leurs sentimens sur les conducteurs à établir à Kronstadt, Schlusselbourg, Wybourg, Friedrichsham, Kexholm, Neuslot, Wilmanstrand et Archangel, dont ils ont examiné en dernier lieu les plans.

V. Sur le Baryte strié de Zméof.

Le 18 Juin 1798 Mr. l'Académicien *Hermann* remit quelques fragmens d'un fossile nouveau de la mine de Zméof, du genre des Barytes striés. Ces fragmens furent donnés à Mr. l'Académicien *Lowitz*, pour en faire l'Analyse chymique, et le 5 Juillet cet Académicien présenta à la Conférence le résultat de ses expériences, d'après lesquelles ce fossile est un véritable Withérite (Carbonate de Baryte) Quatre-cens grains se dissolvèrent parfaitement, sans effer-

effervescence et sans le secours de la chaleur, dans neuf dragmes de l'acide muriatique délayés dans deux onces d'eau et donnèrent, par la crystallisation, quatre-cens-quatre-vingt grains de Muriate de Baryte. La lessive en résidu entièrement desséchée, fournit, par la décoction avec de l'esprit de vin rectifié (Alcohol), douze grains de muriate de terre Strontienne, de laquelle Mr. *Lowitz* obtint, au moyen de l'acide sulfurique, quelque peu de Sulfate de chaux. De là résulte que ce Withérite contient aussi sur cent parties deux parties de Carbonate de terre Strontienne et un peu de Carbonate de chaux. Ainsi Mr. *Lowitz* a eu le plaisir de retrouver ici la terre Strontienne qu'il avoit découverte en 1794 dans toutes les espèces de Spath pesant.

VI. Sur un téléscope de Herschel de 20 pieds.

Le 5 Juillet 1798 l'Académie reçut, par S. E. Mr. le Prince *Youssoupoff*, l'ordre de *Sa Majesté* d'examiner un téléscope de vingt pieds, dont le miroir, les oculaires et quelques autres pièces principales avoient été faites à Londres par Mr. *Herschel* et envoyées ici par ordre de feue l'Impératrice Catherine II. de glorieuse mémoire, pour être composées et montées par un Artiste Anglois, nommé Riches, établi à St Pétersbourg, qui avait fait le tuyau de fer battu. Mrs. les Académiciens *Roumovski*, *Euler*, *Krafft*, *Fuſs* et *Henry* furent chargés de cet examen, et ils rapportèrent d'avoir trouvé toutes les pièces envoyées de Londres dans un degré de perfection tel qu'on est en droit de l'attendre de tout ce qui sort des mains du célèbre Opticien et Astronome qui a fait et envoyé ces pieces; mais qu'on ne sauroit

roit juger de l'effet que produira ce bel instrument, que lorsqu'il aura été monté ; et que si *Sa Majesté* ordonne qu'il soit fait quelque emploi de ce téléscope, il faudra incessamment bâtir une plateforme, un échaffaudage et un petit observatoire mobile, selon les préceptes publiés par Mr. *Herschel.*

VII. Sur un instrument nommé Scotographe.

Le 21 Juillet 1798 l'Académie reçut un ordre de *Sa Majesté l'Empéreur* d'examiner un instrument que le fabriquant Ancelin avoit très-humblement présenté, sous le nom de Scotographe ; d'en dire son sentiment et de récompenser l'auteur selon la valeur de son invention. La Conférence répondit que l'instrument en question ayant été examiné, on a trouvé qu'à son aide un homme, dans l'obscurité, peut non seulement coucher ses pensées sur le papier, mais tirer en même tems quelques copies de ce qu'il a écrit, pour peu qu'il se soit exercé à manier l'instrument, ce qui n'est pas du tout difficile ; que cependant, quoique ce Scotographe fasse assez bien le service que l'inventeur en promet, l'invention n'est pas d'une si grande importance, que l'auteur puisse prétendre à une récompense considérable et que l'Académie croit qu'une médaille d'or de la valeur de vingt Ducats suffiroit pour le dédommager de ses fraix et lui servir en même tems d'encouragement. A la suite de ce rapport *Sa Majesté* daigna ordonner de remettre au Sieur Ancelin la médaille proposée et de garder le Scotographe dans le Cabinet de l'Académie, ce qui fut exécuté le 22 Octobre.

Dé-

Description du Scotographe.

Le mécanisme de cet instrument consiste dans un anneau mobile sur deux fils d'archal tendus parallèlement et reglant le mouvement de la main en ligne droite, vu que le stile, avec lequel on écrit, et qui passe par l'anneau mobile, ne peut s'écarter de la direction droite horisontale. Ce stile est de métal, ou de bois dur, et on le conduit aussi facilement qu'une plume à écrire, en le pressant plus ou moins fortement contre la plaque polie qui se trouve au dessous des fils d'archal tendus et enchassés dans le même quadre. Sur cette plaque, qui dans l'instrument présenté étoit de verre, on met une feuille de papier blanc qui doit recevoir les traits de l'écriture : on la couvre d'une autre feuille teinte d'une couleur sêche et grasse du côté qui touche le papier blanc; et si l'on veut avoir une copie, on met dessus une seconde feuille de papier blanc qu'on couvre d'une seconde feuille colorée. Tout étant ainsi préparé on commence à écrire avec le stile placé dans l'anneau, et étant parvenu au bout de la ligne, ce qu'on sent par l'obstacle que le cadre oppose à la continuation du mouvement, une manivelle fait subitement avancer la plaque couverte des feuilles, autant qu'il en faut pour l'intervalle d'une ligne à l'autre. On continue ainsi de ligne en ligne et par cette opération les traits du stile s'impriment en couleur sur les feuilles blanches placées au dessous des colorées et l'écriture y paroît distinctement. Outre ces pièces principales du Scotographe il y en a d'autres qui sont accessoires et qui servent à appuyer la main et à arrêter l'anneau, si l'on veut s'arrêter pour quelque tems au milieu d'une ligne.

VIII. Discussion d'une question de Mécanique.

Un différend s'étoit élevé entre Mr. *Baird*, propriétaire d'une machine à feu, employée à faire mouvoir un marteau de forge de huit poudes, et Mr. *Poidebard* qui avoit loué le reste de la force de la machine, pour faire aller deux moulins à bled, et qui s'étoit plaint que ses moulins ne faisoient pas tout leur effet, parceque la machine à feu n'étoit pas duëment entretenue par le propriétaire, tandis que Mr. *Baird* de son côté prétendoit que la résistance des deux moulins excédoit la portion de forces qu'il avoit cédé par contrat à Mr. *Poidebard*. Ce différend devoit être vuidé par des arbitres qui, en envoyant à l'Académie le 13 Août 1798 les plans et la description des mécanismes, avoient prié l'Académie de vouloir bien décider les questions suivantes: 1°) Quelle est la force d'une machine à feu à simple vapeur des dimensions et de la construction marquées? 2°) quelle est la force nécessaire pour faire jouer un marteau de huit poudes avec une vitesse et une élévation données? 3°) quelle est la force nécessaire pour faire aller les deux moulins. Mrs. les Académiciens *Euler*, *Krafft* et *Fuſs* ayant été chargés d'examiner cette affaire, après s'etre fait donner encore quelques éclaircissemens nécessaires, et après s'être rendus eux-memes à la fabrique de Mr. *Baird*, afin de s'en instruire à fond, ils présentèrent le 17 Septembre leur rapport, en vertu duquel il est résulté de leurs calculs: 1) qu'une machine à vapeurs des dimensions marquées, duëment entretenue et donnant son plein effet, doit être en état de jouer avec une vîtesse soûtenue de vingt coups de piston par minute, tant que la somme de toutes les résista ces qu'elle

qu'elle doit vaincre, n'excède pas 2975 livres ; 2°) que la résistance engendrée par le marteau etc. est de 1421 livres ; 3°) que la résistance des deux moulins est de 1033 livres, le tout transmis au même bras de lévier; et que par conséquent la machine à vapeur et les moulins duëment entretenus, il doit y avoir un excédent de forces de 521 livres.

IX. Sur quelques mémoires d'Analyse de Mr. le Comte de Trédern.

Mr. le Comte de *Trédern* ancien Officier de la Marine de France, ayant présenté à l'Académie quelques mémoires analytiques, Mr. l'Académicien *Fuſs* fut chargé de les examiner et d'en dire son avis à la Conférence, c'est ce qu'il fit dans deux rapports très-circonstanciés, que Mr. l'Académicien *Gourieff* signa aussi, comme parfaitement conformes au sentiment que la lecture de ces mémoires lui avoit donné de leur valeur intrinséque, mais qui sont trop longs pour être insérés ici.

X. Sur un enduit prétendu incombustible.

Le Collège *Impérial* de l'Amirauté ayant fait inviter l'Académie le 18 Octobre 1798, en vertu d'un ordre suprême, à faire assister quelques uns de ses membres aux expériences que le Sieur *Angel* se proposa de faire devant le Collège, a l'effèt de constater l'incombustibilité d'un enduit de son invention ; la Conférence chargea Mrs. les Academiciens *Severguine*, *Lowitz* et *Zakharoff* de se rendre au dit Collège, et le 25 Octobre ils firent à l'Acadé-

mie leur rapport de l'issue de ces expériences qui ont prouvé que l'enduit du Sieur *Angel* ne garantit que très foiblement contre la combustion et ne pourroit guères empêcher les vaisseaux qui en seroient enduits, d'être consumés par le feu.

VIII.

Leçons publiques.

En 1797 Mr. l'Académicien *Ozeretskovski* lut sur la Physiologie des animaux; Mr. l'Académicien *Hermann*: sur l'art de l'exploitation des mines et sur la Métallurgie; Mr. l'Académicien *Severguine*: sur la Minéralogie générale basée sur la Chymie; Mr. l'Adjoint *Gourief*: sur la Géométrie élémentaire, la Trigonométrie plane, une partie de la Géométrie curviligne et les premiers élémens du calcul différentiel et intégral.

En 1798 Mr. l'Académicien *Ozeretskovski* donna un cours d'Entomologie; Mr. l'Académicien *Severguine*: un cours d'Oryctographie; Mr. l'Académicien *Zakharoff*: un cours de Chymie théorétique et Mr. l'Académicien *Gourief*: un cours de Mécanique.

IX.

Dans le courant des années 1797 et 1798 l'Académie publia, outre les continuations des новыя ежемесячныя сочиненія et de la древняя Россійская Библіотика, les ouvrages suivans:

1°)

1°) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tomus X.

2°) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tomus XI.

3°) Tentamen resolvendi problema geographico-magneticum. Auctore C. A. *Kratzenstein.*

4°) Фомина описанїе Бѣлаго моря.

5°) Tableau des provinces entre les fleuves Térek et Kour par Mr. le Baron Marschal de *Bieberstein.*

6°) Abhandlung von den Luftwechſel-Maſchinen von Bobert (en Russe et en Allemand).

7°) Начальныя основанїя Минералогїи, ouvrage de Mr. l'Académicien *Severguine* en deux volumes.

8°) Hermanns Mineralogiſche Reiſen in Sibirien. 3 Theile.

9°) Германа сочиненїя о сибирскихъ рудникахъ и заводахъ 3 части.

10°) Опытъ о усовершенїи Елементовъ Геометрїи Академика Гурьева.

X.

Prix proposé.

par le Roy d'Espagne.

Le 3 Mai 1798 l'Académie reçut une note du Chargé d'Affaire d'Espagne, avec l'extrait d'une lettre de S. E. Mr. le Prince de la Paz, Ministre et Secrétaire d'Etat du département des affaires étrangères, à S. E. Mr. le Chevalier

lier d'*Onis*, Ministre plénipotentiaire de S. M. Très Catholique à la Cour *Impériale* de St. Pétersbourg, en date du 23 Février 1797, par laquelle le Ministre est chargé, par ordre du Roi son maître, d'obtenir de l'Académie *Impériale* des Sciences qu'elle propose aux savans du pays, par le moyen des papiers publics, la solution d'un problème de calcul intégral de Don Augustin Pedrayes, énoncé dans un programme espagnol et latin, dont il envoye vingt exemplaires, pour en distribuer aux savans qui voudroient s'en occuper, en leur accordant à cet effêt une année, à compter depuis la premiere anonce, et en offrant au premier qui, au jugement de l'Académie, auroit présenté dans le dit espace de tems, la solution de ce probléme, un prix de cinquante Louisd'or en espèces. Le Roy d'Espagne désire en outre que la personne qui sera chargée par l'Académie de délivrer les exemplaires du programme à ceux qui en demanderont, prenne note, pas des noms, mais du nombre des personnes qui auront pris des exemplaires, probablement dans le but de travailler à la solution du problème; et que si après l'année révolue la solution n'étoit présentée par personne, l'Académie délivrât au Ministre d'Espagne un Certificat, portant le nombre d'exemplaires qui ont été distribués à cet effet. La Conférence académique se prêta volontiers à cette publication, dont elle chargea le Secrétaire, en lui remettant les vingt exemplaires du programme pour les distribuer aux personnes qui en demanderont, et dont il tiendra régistre. La publication se fit en conséquence par les gazettes Russes et Allemandes le Mardi 18 Mai 1798.

EX-

EXTRAITS
DES MÉMOIRES
CONTENUS
DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHÉMATIQUE
ET
PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Facillima methodus plurimos numeros primos praemagnos inveniendi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Cette méthode consiste à chercher toutes les valeurs de a qui rendent les nombres de la forme $naa+1$ non-premiers. L'auteur explique cette méthode, en l'appliquant à la formule $232aa+1$, laquelle produit toujours des nombres composés, lorsque $naa+1=nxx+yy$ et que n est un de ces nombres dont l'auteur a fait la recherche dans un mémoire: *De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne?* où il y a une table de ces nombres, parmi lesquels se trouve aussi le nombre mentionné 232. Or si $232aa+1=232xx+yy$, on a $232(aa-xx)=yy-1$; et mettant $y=1+58z$ on a $aa-xx=\frac{1}{2}z(29z\pm1)$, ou bien $rs=\frac{1}{2}z(29z\pm1)$ en posant $a+x=r$ et $a-x=s$, de sorte que $a=\frac{r+s}{2}$. En donnant donc successivement à z les valeurs 1, 2, 3, 4, etc. on obtient les valeurs r et s, et partant les valeurs a qui ren-

rendent la formule $23 \cdot aa + 1$ un nombre composé. Tous ces nombres étant exclus, les autres donneront nécessairement tous les nombres premiers contenus dans cette formule, et par un calcul qui n'est ni long ni pénible on peut pousser cette recherche jusqu'à plusieurs millions.

II.

Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi, utrum sint primi nec ne.

Auctore *L. Eulero*, pag. 11.

Si le nombre à examiner N est réductible à la forme $aa + \lambda bb$ et qu'on peut le représenter encore d'une autre maniere par la forme semblable $xx + \lambda yy$, il sera certainement non-premier et on aura $\frac{a+x}{y+b} = \lambda \frac{y-b}{a-x}$. Ayant reduit cette fraction à ses moindres termes $\lambda . \frac{p}{q}$, on mettra $a + x = \lambda mp$ et $y - b = np$, et on aura $a - x = nq$ et $y + b = mq$, de sorte que $a = \frac{\lambda mp + nq}{2}$ et $b = \frac{mq - np}{2}$, et $\lambda pp + qq$ sera nécessairement un facteur du nombre proposé N. Tout revient donc dans cette recherche à s'assûrer, si le nombre $N = aa + \lambda bb$ est aussi compris dans une autre forme $xx + \lambda yy$ semblable à celle-là, ou non? Dans le premier cas on trouvera facilement ses facteurs; dans le second cas on peut être sûr que le nombre proposé est premier. L'auteur a éclairci cette méthode par l'examen de plusieurs grands nombres, parmi lesquels les plus grands nombres premiers sont 11866009, 18518809.

III.

III.

Observatio singularis circa aequationes differentiales lineares.

Auctore *L. Eulero*, pag. 52.

Soit une équation différentielle linéaire, ou du 1^r degré, à résoudre : $pz + q\partial z + r\partial\partial z + s\partial^3 z$ etc. $= 0$, où p, q, r, etc. sont fonctions d'une autre variable x, dont la différentielle est constante, et soit m le multiplicateur, fonction de x, qui rend cette équation intégrable, on parvient à une équation $Pm + Q\partial m + R\partial\partial m + S\partial^3 m +$ etc. $= 0$ que l'auteur appelle la *résolvante* de l'équation proposée $pz + q\partial z + r\partial\partial z + s\partial^3 z +$ etc. $= 0$; et ces deux équations, que feu Mr. *Euler* appelle *conjuguées*, sont entr'elles dans une telle liaison réciproque, que si l'une est résoluble, l'autre le sera nécessairement aussi; et c'est là l'observation qui a fourni le sujet de ce mémoire.

IV.

De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt.

Auctore *L. Eulero*, pag. 62.

C'est une chose connue que si dans la formule intégrale $\int Z\,\partial z$, dans laquelle Z dénote une fonction quelconque de z, on met $z = v(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, cette formule $\int Z\,\partial z$ se décompose en deux autres $\int p\partial v + \sqrt{-1}\int q\partial v$, où p et q sont des fonctions réelles de v. Or toutes les

fois que l'intégrale d'une pareille formule $\int Z \partial z$ est connue, il sera facile d'en déduire les intégrales dérivées $\int p \partial v$ et $\int q \partial v$, qui cependant, pour peu que la fonction Z soit compliquée, surtout si elle implique des irrationnelles, deviennent tellement embarrassées que personne n'oseroit en tenter l'intégration. C'est ainsi qu'en mettant $Z = \frac{1}{\sqrt{(1-zz)}}$, de sorte que $\int Z \partial z = A.$ fin z, si au lieu de Z on met $v(\text{cof}\,\theta + \sqrt{-1}\,\text{fin}\,\theta)$, on obtient l'arc, dont cette quantité est le finus, exprimé par quatre formules intégrales extrêmement compliquées, dont cependant l'auteur parvient enfin, après plusieurs artifices, à trouver l'intégrale *a priori*. En mettant $Z = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+z^n)}}$ on est conduit à deux formules $\int p \partial v$ et $\int q \partial v$, dont les intégrales peuvent très certainement être exprimées par des logarithmes et des arcs de cercle, quoiqu'on ne voye pas comment et par quelles substitutions ces formules puissent être dégagées de leur irrationnalité. C'est donc un vaste champ que feu Mr. *Euler* abandonne aux Géomètres pour y exercer leur sagacité.

V.

Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1 + x + xx)^n$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 75.

Feu Mr. *Euler* a consacré ce mémoire à la recherche de plusieurs propriétés remarquables des coëfficiens de ce trinome développé. Il considère le plus grand coëfficient, ou le moyen, qu'il indique, avec ceux qui le suivent, par les lettres :

p,

p, q, r, etc. pour la puissance n^{me}
p', q', r', etc. pour la puissance $(n+1)^{me}$
p'', q'', r'', etc. pour la puissance $(n+2)^{me}$

et ainsi de suite, et il détermine premierement les coëfficiens p, q, r, etc. par l'exposant n, au moyen du symbolisme dont il s'est servi dans ses derniers ouvrages pour indiquer les coëfficiens des puissances du binome; après quoi il s'attache à déterminer la relation qui subsiste entre les coëfficiens du même ordre dans les puissances consécutives du trinome, savoir entre les valeurs p, p', p'', et enfin la relation entre les coëfficiens quelconques correspondans, dans les mêmes trois puissances consécutives, savoir, la n^{me}, $(n+1)^{me}$ et $(n+2)^{me}$. De là il passe à la détermination des coëfficiens q, r, s, etc. exprimés par le seul p et ses dérivées, ce qui est suivi de la recherche des formules intégrales finies qui expriment les coëfficiens p, q, r, s, etc. Il finit le mémoire par la sommation de la série dont les termes sont les termes moyens des puissances du trinome développées, lorsqu'on met successivement les exposans $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. et la sommation des séries dont les termes se trouvent dans les diagonales consécutives parallèles à celle que forment les dits termes moyens.

VI.

De innumeris curvis algebraicis quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 111.

Feu Mr. *Euler* s'étoit occupé beaucoup autrefois de la recherche de courbes algébriques, dont les arcs pussent

être mesurés par des arcs ou paraboliques ou elliptiques, ou dont la rectification indéfinie convint avec celle de la Parabole et de l'Ellipse ; mais toutes les tentatives faites par ce grand Géomètre pour trouver des courbes algébriques dont l'arc pût être exprimé par des arcs de l'Hyperbole, avoient été infructueuses. L'auteur de ce mémoire, après s'être longtems occupé de ce sujet, avoit été sur le point de l'abandonner entièrement, désespérant du succès, lors qu'une idée heureuse le conduisit à une ligne courbe qui a pour abscisse $x = v + \frac{3}{2\sqrt[3]{v}} - \frac{\sqrt{3}}{2v}$ et pour ordonnée $y = 3\sqrt[3]{v} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{v}} + \frac{1}{2v}$, et dont l'élément de l'arc $= \frac{\partial v}{vv}\sqrt{1+v^4}$ ce qui exprime aussi l'élément de l'arc de l'Hyperbole équilatère. Ce succès l'a engagé à poursuivre ces recherches, et il a trouvé moyen d'assigner une infinité de courbes algébriques qui ont la propriété que leurs arcs peuvent être exprimés non seulement par des arcs de l'Hyperbole équilatère, mais par des arcs hyperboliques quelconques.

VII.

Démonstrations de quelques théorèmes de Géométrie.

Par Mr. *Nicolas Fuſs*, pag. 139.

Trois cercles, décrits avec des rayons différens dans les trois angles d'un triangle, étant enfermés deux à deux entre deux tangentes, les trois intersections de ces trois paires de tangentes seront situées dans une ligne droite. Ce théorème avoit été proposé à Mr. *Fuſs*. La démonstration de

de cette propriété l'a conduit à d'autres non moins remarquables, et plus générales, concernant un nombre quelconque de cercles, ou de sphères; un nombre de petits cercles tracés sur la surface sphérique, compris 2 à 2 entre des arcs de grands cercle qui les touchent etc. Il en est resulté une suite de théorèmes géométriques, dont il donne la démonstration dans ce mémoire.

VIII.

Recherches sur les équations aux différences partielles du premier degré à quatre ou plusieurs variables.

Par Mr. *Jean Trembley*, pag. 153.

L'Histoire de l'Académie pour 1791, qui précède le IX. Vol. des Nova Acta, renferme un mémoire de Mr. *Trembley* sur les équations aux différences partielles du premier degré à trois variables. Le but du savant auteur a été d'étendre ces considérations dans le présent mémoire aux équations à quatre et plusieurs variables. Il y revient sur la méthode du mémoire antérieur et la rend plus directe et plus générale; et il reprend à la fin du mémoire les exemples traités dans le mémoire précédent, et fait voir comment ils cédent tous à une méthode unique. Il seroit impossible de donner une idée de tout cela, sans rapporter en grande partie les calculs de l'auteur, c'est pourquoi nous renvoyons le lecteur au mémoire même.

IX.

IX.

Recherches sur la sphère et le cylindre percés cylindriquement et sur une infinité de manières de percer la sphère de façon que le résidu de sa surface et de sa solidité soit géométriquement assignable.

Par Mr. *Nicolas Fuſs*, page 214.

Si l'on perce une sphère, perpendiculairement au plan de l'un de ses grands cercles, par deux cylindres droits, dont les arcs passent par les milieux des deux rayons qui composent le diamètre de ce grand cercle et qui sont les diametres des cylindres, les deux portions égales, qu'on enlèvera par cette perforation, du solide entier de la sphère, laisseront un reste égal aux deux neuviemes du cube du diamètre de la sphère. Ce théorème de Bossut dont Mr. *Fuſs* avoit lû l'énoncé dans le VIe Tome du Magazin encyclopédique, a donné origine à ce mémoire. Curieux d'en voir le démonstration et n'espérant pas d'obtenir de sitôt l'ouvrage du célébre Bossut, il s'étoit mis à la chercher lui même, ce qui l'a conduit à beaucoup d'autres propriétés remarquables, qu'il présente aux Géomètres dans ce mémoire.

Il montre d'abord qu'une sphère étant percée de la manière sus-dite, non seulement le résidu de sa solidité est géométriquement assignable, mais aussi le résidu de sa surface et la surface intérieure des deux excavations, et que le contour de chaque ouverture est égal au demi-périmètre d'une Ellipse qui a pour demi-petit axe le rayon de le sphère et pour demi-grand axe la corde du quart de grand cercle de la sphère.

En-

Ensuite l'auteur fait voir que si un cylindre est percé d'un autre de même diamètre, de manière que leurs axes se coupent à angles droits, la surface et la solidité de la portion enlevée et la surface intérieure de l'excavation sont aussi géométriquement assignables, et que le contour de l'ouverture est aussi égal au périmètre d'une ellipse qui a pour demi-grand axe la corde du quart de cercle base de l'ouverture, et pour demi-petit axe le rayon du cylindre.

De là Mr. *Fuſs* passe à la détermination du contour et de la surface intérieure de l'excavation, de même que de la surface et de la solidité de la portion enlevée, lorsque la sphère aura été percée avec une tarière cylindrique quelconque et dans une direction quelconque.

Enfin l'auteur suppose qu'un demi onglet de la sphère soit percé par un corps insistant perpendiculairement à une portion du secteur, base du demi-onglet, laquelle portion est comprise entre une partie du rayon et une ligne courbe quelconque, et il détermine la surface et la solidité qui resteront à l'onglet entier après la perforation. La solution de ce Problême le met en état d'assigner une infinité de manières de percer la sphère de façon que son résidu tant en surface qu'en solidité soit géométriquement assignable.

X.

De numeris qui semel vel pluries in summam duorum quadratorum resolvi possunt.

Auctore *C. F. Kausler*, pag. 232.

La résolution d'un nombre en deux carrés fournit le moyen

moyen le plus facile d'examiner s'il est premier ou non, et dans le dernier cas quels sont ses facteurs. Feu Mr. *L. Euler* a été le premier à employer cette méthode, et Mr. *Kausler* a taché de la perfectionner dans un mémoire inséré au 9me Volume de Nova Acta. Mais ayant trouvé tant à la méthode de Mr. *Euler* qu'à la sienne le défaut d'être indirectes et de rendre la décomposition d'un nombre en deux carrés difficile dans beaucoup de cas, il revient à cette matière dans le présent mémoire, qui contient quelques additions propres à perfectionner la méthode, et quelques observations nouvelles sur les nombres qui sont la somme de deux carrés. A la fin du mémoire Mr. *Kausler* donne une table subsidiaire, au moyen de laquelle la décomposition des nombres de la forme $4m+1$ en deux carrés devient très facile, de meme que l'examen s'ils sont premiers ou non.

XI.

Remarques pour faciliter la recherche des diviseurs des nombres premiers.

Par Mr. *C. F. Kausler*, page 268.

Dans le mémoire précédent Mr. *Kausler* a fait voir comment, au moyen des nombres pronics, on peut décomposer, si cela est possible, un nombre impair de la forme $4m+1$ en deux carrés. Dans le présent mémoire il s'occupe des moyens d'appliquer cette méthode à tous les nombres impairs sans exception. L'ouvrage de Mr. le *Gendre* a fourni matière aux remarques que Mr. *Kausler* présente ici.

ici. Elles servent à abrêger d'avantage les calculs que préscrit la théorie mentionnée ; la premiere en montrant de quelle maniere on pourra employer les tables connuës des nombes premiers et des diviseurs des nombres, à l'examen des nombres qui surpassent les limites des tables ; la seconde en présentant une nouvelle méthode d'examiner la divisibilité d'un nombre quelconque par plusieurs autres nombres donnés.

XII.

Serierum principalium, quae sinus angulorum multiplorum exprimunt, demonstratio elementaris.

Auctore *W. L. Krafft*, pag. 290.

Dans ce Mémoire l'auteur présente une démonstration des deux séries connuës :

$$\text{fin } m\Phi = m \text{ fin}\Phi - \frac{m.m^2-1}{2.3}\text{fin}\Phi^3 + \frac{m.m^2-1.m^2-9}{2.3.4.5}\text{fin}\Phi^5 - \text{etc.}$$

et $\text{fin } m\Phi = \text{cof}\Phi\,[m \text{ fin}\Phi - \frac{m.m^2-4}{2.3}\text{fin}\Phi^3 + \frac{m.m^2-4.m-16}{2.3.4.5}\text{fin}\Phi^5 - \text{etc.}]$

qui expriment le sinus d'un angle multiple quelconque, l'une par le sinus, l'autre par le sinus et le cosinus de l'angle simple, et qui se terminent l'une ou l'autre par un nombre fini des termes, selon que l'exposant du multiple est un nombre entier impair ou pair. L'auteur appelle *élémentaire* la démonstration qu'il en donne, parcequ'elle est tirée directement des relations réciproques des sinus et des angles qui leur répondent, et qu'il ne se sert que des artifices de l'Analyse assez connus, au lieu que les autres démonstrations qu'on en a, ont recours au Calcul infinitésimal

simal et aux quantités imaginaires, qui ont paru à l'auteur être trop éloignés de la nature des deux séries en question.

XIII.

Observations sur le théorème de Taylor, avec sa démonstration par le méthode des limites.

Par Mr. *S. Gourieff*, page 306.

Ce mémoire est encore le fruit des efforts de l'auteur de dégager les mathématiques de toute considération de l'infini. Il s'y sert des différences finies et de la méthode des limites, pour démontrer rigoureusement le fameux théorème de Taylor, et à sa suite le théorème binomial de Newton, pour les exposans rompus, négatifs, irrationnels. Le mémoire se termine par la résolution d'un problème de la méthode inverse des tangentes.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De lacte vaccino et caprino.

Auctore *N. Ozeretskovski*, pag. 339.

L'auteur de ce mémoire avoit déja écrit et publié à Strasbourg en 1778 un mémoire: *De Spiritu ardente ex lacte bubulo*, dans lequel il avoit fait voir comment il faut opérer, pour obtenir du lait un esprit vineux. Ayant voyagé quatre ans après dans le païs des Baschkirs, il a examiné avec attention la méthode que cette nation employe, pour convertir le lait de jument et de vache en une boisson spiritueuse, et il a suivi souvent cette méthode qu'on trouve décrite ici, pour produire une boisson semblable du lait de vache et de chevre. Ce sont les observations que lui ont suggérées ces expériences que Mr. *Ozeretskovski* présente dans ce mémoire.

II.

Methodi novae, acidum tartaricum omne e tartaro crudo perfecte extricandi, expositio.

Auctore *T. Lowitz*, pag. 343.

La maniere très avantageuse, par laquelle Mr. *Lowitz* a réussi à séparer entièrement l'acide du tartre crû consiste en ce qu'il commence à saturer le tartre crû avec de la craye, et qu'il verse ensuite sur le fluide qui surnage au tartrite de chaux, une solution filtrée de

muriate de chaux, jusqu'à ce qu'il n'y en a plus de précipitation. Tout le tartrite de chaux, engendré par la craye et la muriate de chaux, après avoir été édulcoré avec de l'eau, se traite comme à l'ordinaire, avec la seule différence, que pour la séparation de l'acide il faut employer à présent deux fois plus d'acide sulfurique. On obtient de cette maniere de 30 ℔ de tartre 16 ℔ d'acide tartareux crystallisé au lieu que par l'emploi de la craye seule on n'a obtenu autrefois que la moitié de cette quantité.

III.

Histoire naturelle des géodes.

Par Mr. *B. Severguine*, page 357.

Une géode remarquable ayant été remise à l'auteur par Son Excellence Mr. le Comte de *Moussin-Pouchkin*, ceci l'engagea à saisir cette occasion, pour donner un exposé de l'histoire naturelle de ces espèces de pierres en général. Après avoir déterminé leur nature, leurs caractères distinctifs et leurs differentes variétés, l'auteur parle de leur formation probable, qu'il attribue au desséchement spontané des sédimens silicieux mélangés avec des particules hétérogènes. Il finit son mémoire par une classification de différentes espèces de pierres globuleuses qui se trouvent dans la nature.

IV.

De duobus foetibus humanis monstrosis.

Auctore *N. Ozeretskovski*, pag. 367.

Deux foetus monstrueux, envoyés au Musée académique

que, par ordre de *Sa Majesté l'Empereur*, au commencement de l'année 1799, sont décrits dans ce mémoire accompagné d'un dessin fait sous les yeux de l'auteur.

V.

Mirab. Jalaparum hybridarum spicilegium ultimum.

Auctore *I. T. Koelreuter*, pag. 373.

Qui est ce qui n'est pas surpris de l'application de la patience et des soins du célèbre Botaniste allemand qui, pendant une suite d'années, a fait des essais si nombreux sur la fécondation artificielle de plusieurs espèces de plantes et qui a décrit celles qui en étoient produites, d'après tous leurs rapports et même d'après leur poids. Marchand fit le premier cette observation en 1715 sur la *Mercuriale*. Gmelin la renouvella sur le *Delphinium* en 1749. *Voyez* la Dissertation de Linné, intitulée: *Plantae hybridae*, et les mémoires de notre l'Académie pour 1782 et 1786, qui contiennent les belles expériences de Mr. *Koelreuter* sur les Digitales, les Lobélies, les Mauves etc. C'est de la suite considérable de plus de 80 essais que résulte la preuve intéressante de l'identité des plantes. Toutes les plantes hybrides ou perdoient leur germination, ou apparoissoient, après quelques années, sous la forme de l'espèce primitive.

VI.

Notice sur les roches des Monts-Altaï en Sibérie.

Par Mr. *B. F. I Herrmann*, page 409.

L'auteur s'occupe ici principalement de différentes variétés de Porphyres, apportées des Monts-Altaï en Sibérie

rie, pour les ornemens des palais *Impériaux*. Il les reduit à quatre espèces principales, savoir: 1) Porphyre à base de Jaspe; 2) Porphyre à base de pierre de corne; 3) Porphyre à base de Trapp; 4) Porphyre à base de Serpentine. Enfin il donne une description détaillée de 110 variétés de Porphyres, avec leur lieu natal et leur usage.

VII.

Symphyti asperi nova species, descripta ab I. Lepechin.

pag. 442.

Le défunt auteur décrit ici une nouvelle espèce de la Consoude, dont la patrie est la Tauride, si abondante en plantes nouvelles. Mr. le Baron Marschal de *Bieberstein* ayant parcouru cette contrée en observateur soigneux y a découvert une quantité très-considérable de nouvelles plantes, dont la présente, comme plante superbe, se conserve encore aujourd'hui dans le jardin botanique de l'Académie.

VIII.

Notice sur une grouppe remarquable de spath de plomb de la Sibérie.

Par Mr. *B. F. I. Herrmann*, page 445.

L'auteur donne ici une déscription détaillée des caractères extérieurs et des propriétés chymiques d'une variété particulière de spath de plomb blanc de Nertschinsk sur une

une grouppe remarquable de crystaux de cette mine. D'accord avec Mr. l'Académicien *Severguine* il avance qu'elle mérite d'etre séparée du spath de plomb prismatique, qui a été connu auparavant, par exemple celui du Hartz. Suivant l'analyse de Mr. l'Académicien *Lowitz* 100 parties en contiennent 83 d'oxide de plomb, et 16 d'acide carbonique.

IX.

An ad aetherum naturam constituendam necessaria sint acida disquirit Laur. de Crell.

pag. 450.

Mr de *Crell* démontre ici, par des expériences nombreuses, que dans la préparation des diverses espèces d'éther il entre dans leur composition, comme partie constituante, quelque peu de l'acide employé à leur préparation. Voici les faits principaux, sur lesquels il s'appuye :

1°) Mr. de *Crell* traita l'éther sulfurique avec l'acide nitrique pur, et ajouta du nitrate de Baryte au fluide engendré au fond du vase, après en avoir séparé la naphte surnageante. Il s'en forma une précipitation de sulfate de Baryte.

2°) L'éther nitrique, mêlé avec l'acide sulfurique, rendit non-seulement des vapeurs rouges, mais des feuilles d'or battu, jettés dans le liquide obtenu par la distillation, furent dissoutes aussitôt après y avoir mis du muriate d'Ammoniaque.

3°)

3°) L'éther muriatique, traité avec de l'acide sulfurique mêlé de sulfate d'argent, donna du muriate d'argent.

4°) L'éther acéteux, mêlé avec de l'acide sulfurique et distillé, donna un fluide dont le goût approchoit de celui de l'Acétate de plomb, lorsqu'on traitoit la destillation avec de l'oxide de plomb rouge.

X.

Descriptio et Analysis lapidis Marecani.

Auctore *T. Fr. Gmelin*, pag. 459.

Le célèbre auteur de ce mémoire a soumis à l'Analyse chymique les pierres remarquables qui ont été trouvées à une trentaine de Verstes d'Ochotzsk et nommées *Marecan*. Deuxcent grains de ces pierres lui ont donné les parties constituantes suivantes:

Silice	160,90 gr.
Alumine	29,25
Magnésie	0,25
Oxide de fer, avec quelque indice d'oxide de Manganèse . .	4,75
Eau de crystallisation . .	2,00
	196,25
Perte	3,75
	200,00.

XI.

XI.

De plantis tetradynamis: vulgo cruciformibus (Tournefortii).

Auctore *T. Smelovski*, pag. 470.

L'auteur de cette Dissertation sur les plantes de la classe de Tetradynamie, selon le système sexuel, tâche de démontrer, que les caractères génériques, pris de la figure, de la structure et de la longueur du fruit, sont les meilleurs.

XII.

Plantae contortae in promontorio bonae spei Africes olim collectae, jamque descriptae.

Auctore *C. P. Thunberg*, pag. 503.

Les plantes qui appartiennent à la famille des Apocinées, ont été désignées dans les ordres naturels de Linné par le nom de *Contortae*. Le célèbre auteur a décrit ici, avec la plus grande précision, les espèces suivantes: Echites *succulenta*, bispinosa; Asclepias *aphylla*, *siliformis*, *fruticosa*, *crispa*, *undulata*, *mucronata*, *grandiflora*, *arborescens*; Apocynum *filiforme*, *lineare*, *triflorum*, *lanceolatum*, *cordatum*, *hastatum*; Ceropegia *sagittata*; Periploca *tenuifolia*, *africana*, *secamone*; Pergularia *edulis*.

XIII.

Hermas plantae genus, descriptionibus, animadversionibus et iconibus illustratum.

Auctore *C. P. Thunberg*, pag. 527.

Les *Hermas* forment un genre bien distingué des

Buplevres, par les collerettes partielles toujours incomplètes et unilatérales, par les fleurs polygames et par la semence cordiforme, orbiculaire, comprimée, marginée, dans toutes les espèces que l'on connoît.

Mr. le Chevalier *Thunberg* a trouvé plusieurs espèces de ce genre au Cap de Bonne-Espérance, et donne ici une déscription plus exacte de plantes suivantes: H. *gigantea*; avec fig. H. *ciliata*, *villosa*, *capitata*; avec fig. H. *quinquedentata* avec fig.

XIV.

Déscription du Sparus ornatus, nouvelle espèce de poisson thorachique.

Par Mr. *A. Sevastianof*, page 521.

Ce poisson a été envoyé pour le Musée académique, où il se trouve àprésent, par Mr. le Conseiller de Cour Waxell, Correspondant de l'Académie actuellement à Londres; et selon sa notice ce joli Spare habite la mer du Sud.

CLASSE D'ASTRONOMIE ET DE MÉTÉOROLOGIE.

I.

Sur le calcul des variations des étoiles.

Par Mr. *Beitler*, pag 537.

Le but de l'auteur de ce mémoire a été de donner des formules qui représentassent rigoureusement la précession des étoiles en ascension droite et en déclinaison, pour un intervalle de plusieurs siècles, qui fussent en même temps d'un usage commode, et qui enfin ne demandassent pas trop d'espace dans les catalogues des étoiles. Pour arriver à ce but l'auteur s'est vu dans la nécessité d'employer plusieurs corrections qui jusqu'à présent ont été négligées dans le calcul des variations décennales, et de faire aussi une petite correction aux formules des variations séculaires en longitude et en latitude.

II.

De transitu Mercurii per Solem Anno 1799 die $\frac{26}{7}$ April/Maii Petropoli expectando.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 603.

Mr. de *Roumovski* ayant calculé d'avance les principaux momens du passage de Mercure de 1799, il expose ici le résultat de ses calculs. Ce mémoire ne peut plus

avoir d'autre intérêt pour les Astronomes, si ce n'est celui d'être un des derniers travaux du célèbre auteur qui, nommé bientôt après Vice-Président de l'Académie, a terminé par ce mémoire et par celui dont nous parlerons tantôt, sa carrière d'Astronome.

III.

Sur les passages de Mercure sur le Soleil dans le XIX siècle.

Par Mr. *F. T. Schubert*, seconde partie, page 509.

Dans le Tome précédent de nos Actes Mr. *Schubert* avoit donné les formules générales, sur lesquelles il a calculé ces phénomènes. Dans cette seconde partie il en donne les résultats. Il y aura dans ce siècle treize passages de Mercure sur le Soleil, dont on trouve dans ce mémoire tout le détail, divisé en trois sections qui donnent les circonstances de chaque passage, telles qu'elles paroîtront au centre de la terre, aux différens points de sa surface, et à St. Pétersbourg. La premiere section contient donc le tems vrai du contact extérieur et intérieur, tant pour l'entrée que pour la sortie. La seconde assigne les lieux de la terre, qui auront le Soleil au zénith à l'instant du milieu, de l'entrée et de la sortie, celui qui verra la plus grande phase, ceux qui verront les premiers ou les derniers l'entrée et la sortie, ceux qui verront précisement tout le passage, enfin ceux qui ne verront que l'instant de l'entrée ou de la sortie. La troisième section donne, pour l'horison de St. Pétersbourg, les instans de l'entrée et de la sortie apparente, la plus grande phase, et la situation des points de l'immersion, de l'émersion et du milieu, rela-

relativement au vertical mené par le centre du Soleil. Il s'en suit: 1) qu'il arrivera neuf passages au mois de Novembre, et quatre au mois de Mai; 2) que le passage de 1802 a eu la durée la plus longue qui soit possible au mois de Novembre, savoir de $5\frac{1}{2}$ heures; que celui de 1822 sera de la plus courte durée de $2^h\ 51'$; et que celui qui arrivera le 6 Mai 1878 durera le plus long tems, savoir $7^h\ 37'$; 3) qu'on ne verra à St. Pétersbourg que huit de ces passages, dans les années 1802 Novembre, 1832 Mai, 1845 Mai, 1848 Novembre, 1861 Novembre, 1868 Novembre, 1878 Mai, 1891 Mai.

IV.

Supplément au mémoire précédent.

Par Mr. *F. T. Schubert*, page 656.

Ce supplément contient le calcul des deux passages de Venus sur le Soleil, qui auront lieu le 9 Décembre 1874, et le 6 Décembre 1882. Le premier durera sur toute la terre $4^h\ 56'\ 7''$, le second $6^h\ 33'\ 42''$. Celui-là sera plus favorable à la détermination de la parallaxe du Soleil, la plus grande différence entre les durées étant d'une demie-heure, entre les instans de l'entrée de 13 min. et entre les instans de la sortie de 16 min; tandis que dans l'autre passage la plus grande différence entre les durées, dans des endroits où l'on peut faire des observations, ne sera que de $12\frac{1}{2}$ min. Les cinq lieux les plus intéressans pour l'observation du premier passage, seront Botany-Bay, le Cap Comorin, Alachka, Okhotsk et Oustioug.

V.

V.

Théorie de Mars.

Par Mr. *F. T. Schubert*, premiere partie, page 674, seconde partie, page 695.

L'auteur de ce mémoire ayant trouvé des différences considérables entre les perturbations de Mars, calculées par MM. *Oriani*, *Burkhardt*, *Wurm* et *Schubert*, crut devoir reprendre ce calcul avec plus de soin et d'exactitude. Il donne dans ces deux mémoires, les inégalités périodiques de Mars, produites par l'action de la Terre, de Venus et de Jupiter, tant celles qui dépendent de la premiere et de la seconde dimension des excentricités et des déclinaisons, que celles qui n'en dépendent pas du tout. Quant aux dernières, son calcul se trouve parfaitement d'accord avec celui de ces trois Astronomes. Parmi celles qui dépendent de l'excentricité simple, il y en a quatre dont la plus grande est de 3″, que MM. *Oriani* et *Burkhardt* ont tout-à-fait négligées, et deux autres, où leur calcul diffère de celui de Mr. *Schubert* d'une à deux secondes. Parmi celles qui dépendent de la seconde dimension des excentricités, il se trouve des différences plus considérables, qui montent à 8 ou 9 secondes. L'auteur a compris toutes ces équations dans treize tables. Il a encore trouvé une équation du Soleil et une autre de Vénus, produites par la réaction de Mars, dont l'une est de 1″,1; l'autre de 4″,8.

VI.

VI.

Sur les perturbations de la nouvelle planète, par l'action de Jupiter.

Par Mr. *F. T. Schubert*, page 714.

Les élémens elliptiques de la planète découverte par M. *Piazzi*, que M. *Gauſs* a calculés, ayant servi à retrouver cette planète, il n'y a pas de doute qu'ils ne soient assés exacts, pour déterminer par leur moyen les perturbations auxquelles cette planète est assujettie, et dont on a besoin pour donner à ces élémens un plus haut degré de perfection. Comme c'est principalement Jupiter qui, à cause de sa grosseur et de sa proximité, peut produire des perturbations très sensibles dans le mouvement de la nouvelle planète, Mr. *Schubert* a calculé, d'après la méthode de Mr. *la Place*, les perturbations de cet astre, produites par l'action de Jupiter, en ne portant cependant l'exactitude, pour cette fois-ci, qu'à la premiere puissance des excentricités, et il a trouvé des équations très considérables, que voici:

Nommant $4, l,$ les longitudes moyennes de Jupiter et de la nouvelle planète, et faisant la distance moyenne de la terre au soleil égale à 1000000, on a, par les septièmes élémens de Mr. *Gauſs*:

La diminution annuelle de l'excentricité en parties du rayon $= 0{,}0000059045;$

le mouvement annuel des apsides par rapport aux étoiles fixes $= +\,70'',756;$

l'équa-

l'équation du rayon vecteur = — 94,6 + 1033,93. cos (2 — *l*) — 3814. cos 2 (2 — *l*) — 421,87. cos 3 (2 — *l*) — 107,75. cos 4 (2 — *l*) — 34. cos 5 (2 — *l*) + 43,76. sin (*l* — 42° 44′ 47″) + 247,2. sin (2 — 66° 17′ 58″) + 861,3. sin (2 2 — *l* — 65° 23′ 50″) + 2581,5. sin (3 2 − 2 *l* − 78° 45′ 10″) − 483,7. sin (4 2 − 3 *l* − 78° 23′ 16″) − 96,8. sin (5 2 − 4 *l* − 75° 53′ 33″) − 136,9 sin (2 *l* − 2 − 52° 17′) + 306,2. sin (3 *l* — 2 2 — 57° 7′ 50″) + 41,5. sin. (4 *l* — 3 2 — 60° 8′ 6″);

l'équation de la longitude = + 232″,59. sin (2 − *l*) − 498″,4. sin 2 (2 − *l*) − 44″,4. sin 3 (2 − *l*) − 10″,3. sin 4 (2 − *l*) − 3″,3. sin 5 (2 − *l*) + 60″,2. sin (2 + 17° 39′ 10″) − 623″,4. sin (2 2 − *l* + 26° 48′ 30″) — 442″,5. sin (3 2 — 2 *l* + 11° 30′ 3″) + 57″,6. sin. (4 2 − *l* + 11° 5′ 47″) + 10″,7 sin (5 2 − 4 *l* + 11° 8′ 43″) − 22″,7. sin (2 *l* − 2 + 36° 39′ 45″) + 54″,1. sin (3 *l* − 2 2 + 33° 22′ 20″) + 6″. sin (4 2 — 3 *l* + 31° 8′ 34″).

VII.

Observatio Eclipsis Solis anno 1802 die $\frac{16}{28}$ Aug. habita in observatorio Petropolitano.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 728.

Le commencement de cette éclipse n'a pas pu être observée, à cause des nuages. La fin a été observée $8^h\ 51'\ 56''$.

VIII.

Annotationes ad acus magneticae inclinatoriae usum pertinentes.

Auctore *W. L. Krafft*, pag. 729

Quand on fait des expériences avec des aiguilles d'in

d'inclinaison: on ne s'apperçoit que trop souvent, qu'une même aiguille, quand on répète l'expérience à plusieurs reprises, quoiqu'avec tous les soins possibles, dans les mêmes heures et sous les mêmes circonstances, indique cependant des inclinaisons assez différentes. On attribue avec raison une grande partie de ces variations à l'inconstance du frottement qu'éprouve l'axe des aiguilles, en roulant sur les deux appuis qui le soutiennent.

Occupé de ce genre d'expériences, l'auteur de ce mémoire a eu l'occasion de remarquer, même sur une aiguille d'ailleurs fort bien construite, combien, outre l'influence du frottement, est sensible aussi celle que le moindre défaut de cylindricité dans les tourillons des axes exerce et contribue à altérer l'obliquité de la position des aiguilles, qui ne devroit dépendre que de la force magnétique et de la position de leurs centres de gravité. Il est clair, que l'effet de ce défaut peut s'accumuler d'autant plus pour rendre faux le dernier résultat, plus est grand le nombre des obliquités différentes, que la méthode oblige à observer, pour en calculer celle qui est la véritable inclinaison magnétique. Avec des aiguilles d'inclinaison qu'on doit à l'illustre *Daniel Bernoulli*, les plus parfaites qu'on connoisse, et qui ne laissent plus autre chose à desirer qu'une grande adresse et des soins extrêmes de la part de l'artiste, il faut observer au moins quatre obliquités différentes de l'aiguille, pour en déterminer, par le calcul, la vraie inclinaison. Comme le défaut de cylindricité des tourillons, et tous les autres défauts, quels qu'ils soient, concentrent leur effet dans l'obliquité des aiguilles: l'auteur expose dans ce mémoire des expressions différentielles, qui

donnent à connoître, jusqu'à quel point la détermination de l'inclinaison magnétique peut devenir trompeuse par les erreurs qui pourroient avoir affecté ces quatre obliquités; il fait voir qu'une erreur de 15 minutes seulement sur deux de ces quatre obliquités, en peut produire une de plus de 2 degrés sur la détermination de l'inclinaison magnétique.

IX.

Supplément aux observations astronomiques faites à l'Observatoire du Gymnase académique de Mitau.

Par Mr. *Beitler*, page 733.

Les observations que Mr. *Beitler* communique dans ce mémoire, sont la continuation de celles que l'Académie a fait insérer dans le 12e volume de ses *Nova Acta;* elles roulent 1°) Sur les eclipses des satellites de Jupiter; 2°) sur des occultations d'étoiles; 3°) sur l'éclipse du soleil du 27 Août 1802; 4°) sur l'éclipse partiale de la lune du 11 Septembre 1802.

X.

Observationes quaedam astronomicae Petropoli in Specula domestica habitae.

Auctore *P. Inochodzoff*, pag. 743.

L'auteur rend compte dans ce mémoire du petit nombre d'observations astronomiques qu'il lui a été possible d'instituer depuis son retour à St. Pétersbourg. Les voici:

Le

Le $\frac{12}{24}$ Mai 1801. Occultation de l'épi de la vierge par le bord non éclairé de la Lune $11^h\ 20'\ 53'',6$. Emersion au bord éclairé, observée de quelques secondes trop tard, $12^h\ 24'\ 44''$ temps vrai.

Le $\frac{15}{27}$ Août. Fin de l'éclipse du ☉ bien observée $22^h\ 51'\ 52''$ t. v. Des nuages ont empêché de voir le commencement.

Le $\frac{28}{9}$ $\frac{\text{Oct.}}{\text{Nov.}}$ 1802. Contact des limbes de Mercure ave le limbe occidental du Soleil:

L'intérieur sort à $1^h\ 59'\ 3''$ } t. v.
L'extérieur . . 2 0 15 }

Ces observations ont été faites avec un téléscope de *Short* de deux pieds et la latitude de l'observatoire est $59°\ 54'\ 54''$.

XI.

Obrvationes astronomicae in specula academica institutae.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 747.

L'observatoire de l'Académie ayant été confié à Mr. l'Académicien *Schubert* au mois de Juillet l'an 1803, il présenta au bout de l'année à l'Académie les observations que le ciel peu favorable dans le cours de cette année lui avoit permis de faire conjointement avec Mr. *Wisnefski*. Ces observations sont: 1) l'éclipse solaire le 16 Août, dont le commencement fut observé à $20^h\ 51'\ 21'',73$ tems moyen,

la fin à $21^h\ 27'\ 55'',38$; 2) l'immersion de l'étoile $\chi\ 8$ le 4 Octobre, observée à $1^h\ 50'\ 39'',5$; 3) l'occultation de $\eta\ 8$ le 25 Décembre, dont l'immersion fut observée à $3^h\ 27'\ 57''$, l'émersion à $4^h\ 21'\ 42'',33$.

Quoique l'observation de l'Eclipse solaire, à cause de son extrême petitesse, ne fût pas susceptible d'une grande précision, M. *Schubert* a calculé sa propre observation, et celles qui en ont été faites à Paris, à Copenhague, à Lilienthal et à Cremsmunster; et il en a déduit les erreurs des tables de trois manieres différentes. Il en résulte une erreur en longitude, par l'observation de St. Pétersbourg $= -30''$, par celle de Paris $= -53''$, par celle de Copenhague $= -45''$, par celle de Lilienthal et de Cremsmunster $= -39\frac{1}{2}''$; et une erreur en latitude, par l'observation de Pétersbourg $= -4''$, par celle de Paris $= -7''$, par celle de Copenhague $= -1''$, par celle de Lilienthal $= -\frac{1}{2}''$, par celle de Cremsmunster $= +6''$.

XII.

Continuation du Mémoire sur le perfectionnement d'une méthode de trouver sur mer la latitude du vaisseau.

Par Mr. *Krafft*, page 764.

Ce Mémoire a pour objet le problème de l'Astronomie nautique, de déterminer la latitude du vaisseau par deux hauteurs du soleil et le temps qui les sépare. Dans le Tome IX des nouveaux Actes de l'Académie l'auteur a donné, pour résoudre ce problème, une nouvelle méthode,

qui

qui est plus générale que celle de Mr. *Douves*, et présente sur celle-ci des avantages qui, en cas de besoin, pourroient être utiles aux navigateurs. Mr. *Krafft*, dans son premier mémoire sur ce sujet, a donné sa solution du problème telle qu'elle dérive immédiatement des principes de la Trigonométrie sphérique; dans celui-ci il la présente sous une forme absolument analogue à celle, à laquelle les Mariniers sont habitués dans ces sortes de calcul.

XIII.

Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1797, d'après le nouveau stile.

Par Mr. *J. A. Euler*, pag. 776

Plus grande élévation du baromètre	29,02	pouces
Plus petite élévation du baromètre	27,20	—
Variation totale	1,82	—
Le plus grand froid	18,7	deg. de Réaumur
La plus grande chaleur	22,9	— —
La différence entre ces extrêmes	41,6	— —

Vent dominant: SOu.

Intervalle entre la derniere et la premiere neige de l'année 157 jours.

Jours entièrement séreins 69, en partie séreins 174, couverts 122, brouillards 59 jours, pluye 122 jours, neige 84 jours; orages 12.

XIV.

XIV.

Extrait des observations météorologiques faites à Moscou en 1797, d'après le nouveau stile.

Par Mr. *Stritter*, page 797.

La plus grande élévation du baromètre	27,92 pouces
La plus petite élévation du baromètre	26,50 —
La variation totale	1,42 —
Le plus grand froid (thermomètre de Réaumur)	21,3 deg.
La plus grande chaleur	23,5 —
La différence entre ces temperatures extrêmes	44,8 —

Vent dominant: Nord.

Intervalle entre la derniere et la premiere neige de l'année 160 jours.

Jours entièrement séreins 22, en partie séreins 105, couverts 238, brouillards, 18 jours, pluye 107 jours, neige 91 jours; orages 16.

XV.

Extraits des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1798, d'après le nouveau stile.

Par Mr. *J. A. Euler*, page 808.

La plus grande élévation du baromètre	29,37 pouces
La plus petite élévation du baromètre	27,30 —
Variation totale	2,07 —

Le

Le plus grand froid, (thermomètre de Réaumur) 25,1 deg.
La plus grande chaleur . . . . . 24.0 —
Différence entre ces extrêmes . . . . 49,1 —

Vent dominant: SOu.

Jours entièrement séreins 84, en partie séreins 180, couverts 101, brouillards 57 jours, pluye 102, neige 63, orages 13.

Intervalle entre la dernière et la première neige de l'année 144. jours

XII.

MÉMOIRES ÉTRANGERS

PRÉSENTÉS ET LUS

À L'ACADÉMIE.

LETTRE

sur plusieurs Médailles de la Sarmatie d'Europe et de la Chersonèse Taurique,

adressée à l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg par un de ses Correspondans.

Présenté et lû en Conférence le 8 Fevrier 1804.

Messieurs!

La Sarmatie d'Europe, celle d'Asie et la Chersonèse Taurique, offrent encore un vaste champ pour faire de nouvelles découvertes dans la Géographie ancienne, la Numismatique, et les Antiquités en général. Depuis la glorieuse époque où ces trois provinces ont été soumises au sceptre de la Russie, de célèbres naturalistes se sont empressés d'y aller puiser de nouvelles connoissances, et leur entreprise a été couronnée du plus brillant succès. Mais jusqu'ici personne n'a cherché à dissiper les ténèbres qui regnent encore sur plusieurs parties de l'histoire et des antiquités de ces païs. Il seroit donc à desirer que l'on s'en occupât sérieusement. En effet de combien de villes grècques situées aux bords du Pont-Euxin, célèbres par leur commerce et par leur opulence, sait-on indiquer l'ancien site avec précision? Quel petit nombre de médailles an-

tiques de ces villes est parvenu jusqu'à présent à notre connoissance ! À peine les cabinets les plus distingués en possédent-ils quelques unes de trois ou quatre villes. Hâtons nous donc, pour la gloire de la Russie et l'avantage des sciences, de prevenir les recherches que pourroient faire les voyageurs étrangers, et ne nous laissons pas enlever l'honneur des découvertes, ni la possession des précieux monumens de l'antiquité, qui appartiennent de droit aux cabinets de *Sa Majesté Impériale.*

D'heureux hazards ont secondé le desir que j'avois de contribuer à de semblables découvertes, en remplissant les devoirs de la place que j'ai l'honneur d'occuper. Dans l'espoir donc, que ce premier succès encouragera d'autres amateurs, je n'hésite pas à Vous rendre compte d'une partie de mon travail. Il m'a déjà procuré la connoissance de plusieurs médailles inédites, et même de quelques unes de certaines villes qui jusqu'ici n'en avoient point offert à notre connoissance. À l'aide de notre recueil nous assignons à plusieurs médailles publiées et gravées en différens ouvrages numismatiques, leur vraie patrie, et nous rectifions les opinions erronées de ceux qui les avoient classées et expliquées avant nous.

Voici une partie de ce recueil de médailles de la Sarmatie d'Europe et de la Chersonèse Taurique. Après avoir traité de celles de la ville d'Olbiopolis, nous passerons à celles de la ville de Théudosie et de Héraclium.

1. *Tête de Satyre barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. I. AE. II.

2. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. II. AE. II.

M. l'Abbé Sestine a decrit une médaille semblable.
Descript. Num. Veter. p. 29. no. 3.

3. *La même Médaille d'un coin différent.* AE. II.

4. *A et B. Mêmes types, mêmes légendes, mais plus petites.* Fig. III. AE. II.
Du cabinet de M. le Général de Suchtelen.

5. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΑΘ. Le coryte avec l'arc et la hache.
Du Cabinet de M. de Wiesiolovski.

6. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΑΠ. Le Coryte avec l'arc et la hache. AE. II.
Du même Cabinet.

7. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΑΡ. en Monogramme. Le coryte avec l'arc, et la hache. AE. II.
Froel. Notit Element. p. 104.
Gessn. Num Gr. Populor. et Urb. p. 302.
Mus. Theup. p. 1285.

8.

8. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΑΡΙ. Le coryte avec l'arc et la hache. AE. II.
Au Musée de l'Université de Göttingue.

9. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΒΟΣ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. IV. et V. AE. II.
M Mionnet a publié la même médaille dans sa collection d'empreintes de médailles du cabinet national de France, Nr. 358. p. 19.

10. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΔΙ. Le coryte avec l'arc, et la hache. AE. II.
Pellerin Rec. de Médaill. To. I. p. 204. pl. XXXVI. Nr. 16.

11. *Tête barbue et cornue d'un caractère différent des précédentes.*
ΟΛΒΙΟ. ΕΠ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. VI. AE. II.

12. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΗΓ. en Monogramme. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. VII. AE. II.
Du Cabinet de M. le Baron d'Asch.

13. *Tête d'Hercule jeune.*
ΟΛΒΙΟ. Η ΠΕΕ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. VIII. AE. II.
Du cabinet de M. le Général de Suchtelen.

14. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΘΕ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. IX. AE. II.
Du même Cabinet.

15.

15. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΘΕΥ. Le coryte avec l'arc et la hache. AE. II.
Au Musée de l'Université de Göttingue.

16. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙ.... ΙΒ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Au milieu un autre petit coryte et une petite hache en contremarque. Fig. X. AE. II.

17. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΙΚ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. XI. AE. II.

18. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΜΕ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. XII. AE. II.
Du Cabinet de M. le Général de Suchtelen.

19. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒΙΟ. ΜΙ. Le coryte avec l'arc et la hache. Fig. XIII. AE. II.

20. *Tête barbue et cornue.*
ΟΛΒ. . . ΟΥ. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. XIV. AE. II.

21. *Tête barbue et cornue.*
. ΛΒΙ . . ΤΥ. en monogramme. Le coryte avec l'arc, et la hache. Fig. XV. AE. II.

22. *Tête tourellée.*
ΟΛΒΙΟ. ΑΡ. en monogramme. Un homme le genou en terre, tirant son arc. AE. II.
Du Cabinet de M. de Wiesiolovski.

23. *Tête tourellée, et une tête peu distincte en contremarque.*
ΟΛΒΙΟΠ.... ΤΩΝ. E. Oiseau indistinct. Médaille de fabrique barbare. AE. II.
Au musée de l'Université de Göttingue.

24. *Tête casquée, et une petite tête casquée en contremarque.*
ΟΛΒΙΟ... ΕΙΤ... E. Proue de vaisseau. AE. II.
Du Cabinet de M. le Général de Suchtelen.

25. *Tête de Femme.*
ΟΛΒΙΟ. ΜΝΔ. Une branche d'arbre. AE. II.
Peller. Rec. de Médaill. To. I. p. 204. pl. XXXVI. Nr. 17.

26. *Tête de Femme.*
ΟΛΒΙ. Un Poisson. Fig. XVI. AE. II.

27. ΟΛΒΙΠΟΛΕΙ... *Tête d'homme couronnée de lauriers.*
ΒΙΡΟΘΕΟΞ. L'aigle sur un dauphin. Fig. XVII. AE. II.
Du Cabinet de M. de Wiesiolovski.

28. *Tête de Méduse de face.*
ΟΛΒΙΗ. L'aigle aux ailes éployées sur un dauphin. Fig. XVIII. AE. MM.
Du Cabinet de M. le Général de Suchtelen.

29.

29. *Masque de face tirant la langue; un ornement en forme de Méandre autour de la tête.*
A en creux. Un aigle aux ailes éploïées de profil sur un poisson. Fig. XXI. AE. MM.
Au Cabinet de M. le Général de Suchtelen.

30. *Masque de face d'un caractère différent, tirant la langue. Un ornement en forme de Méandre autour de la tête.*
A en relief. Un aigle aux ailes éploïées de profil sur un poisson. Fig. XXII. AE. MM.

31. *Tête de Cérès couronnée d'épis, ornée d'un collier.*
OΛBIO. L'aigle aux ailes éployées sur un dauphin. AR. I.
Peller. Rec. de Médaill. To. I. p 204. pl. XXXVI. Nr. 15.

32. OΛBIO.....EΩN. *Tête d'Apollon, au devant le coryte, surmonté d'un monogramme composé des lettres* XAP. *En bas un caducée en contremarque.*
AΔƆO....AΦOY... Un oiseau. Fig. XIX. AE. I.

33. *Tête de Jupiter; un astre et un épi de seigle en deux contremarques.* AE. III.
OΛBIOΠOΛITEΩN. Une flèche.
Sestini Lett. e Dissertaz. numism. To. IV. p. 90.

34. *Tête de Jupiter.*
OΛBIOΠOΛITΩN. Une flèche. AE. II.
Froel. Not. Elem. p. 72.
Arigoni Numism. To. 1. tab. XXXIV. Nr. 9.
Sestini L. C.
Ekhel Doctr. Numor. Veter. Vol. I, P. II. p. 34.

35. *Tête d'Apollon couronnée de lauriers.*
ΟΛΒΙΟΠΟΛΕΙΤΕΩΝ. La lyre, à côté un astre. AE. III.
Sestini Descr. Num. Veter. p. 29.

36. *Tête d'Apollon, un astre en contremarque.*
ΟΛΒΙΟΠΟΛΕΙΤΕΩΝ. La lyre, à côté un astre. AE. III.
Sestini L. C.

37. ΑΥΤ ΜΑΡ ΑΝΤΟΝΕΙΝΟC CЄΒ. *Tête de Caracalla couronnée de lauriers.*
ΟΛΒΙΟΠΟΛ.... Jupiter assis et armé de sa foudre dans la main gauche, et de la hasta dans la droite Fig. XX. AE. II.
Au Cabinet de M. de Wiesielovski.

La ville d'Olbiopolis a été fondée par une colonie milésienne assez long tems avant Hérodote, du tems de la Monarchie des Rois Mèdes *a*), dans la seconde année de la trente-unième Olympiade *b*), ou dans la troisième année du regne de Phraortes, 655 ans avant notre Ere *c*). Elle avoit reçû de ses fondateurs le nom de *Milétopolis*, et il est probable que les avantages que lui procuroit un com-

---

a) Herod. L. IV. c. 78. p. 358. Ed. Borh.
Peripl. Anon. p. 9. ap. Geogr. Min. Huds. Vol. I. Scymn. Ch. Fragm. v. 56 — 62. p. 46. ap. Geogr. Min. Huds. Vol. II.

b) Marsham Chr. p. 552

c) Baieri Opuscula p. 143.

commerce florissant, l'avoient fait nommer *Olbia* ou *Olbiopolis, ville fortunée.* Le nom d'Olbie lui donnent Ptolémée *a*), Strabon *b*), et son Abréviateur *c*), Scymnus de l'île de Chios *d*), l'auteur anonyme du Periple du Pont Euxin *e*), Arrien *f*), Etienne de Byzance *g*), et Mela *h*); Hérodote *i*) et Pline *k*) la nomment Olbiopolis, le dernier aussi Olbia. Olbie étoit très célèbre par son commerce, comme Strabon *l*) nous l'atteste.

Les médailles d'Olbiopole que l'on a publiées jusqu'à présent ne portoient point d'autre inscription que celle d'ΟΛΒΙΟ, l'abréviation d'ΟΛΒΙΟΠΟΛΕΙΤΩΝ. On en a pu-

---

a) Geogr. L. III. c. 5. p. 74. Ed. Mont.

b) Geogr. L. VII. p. 470.

c) P. 88. ap. Geogr. Min. Vol. II.

d) Fragm. v. 59. p. 46. Ibid. Vol. II.

e) P. 8. ap. G. M. Vol. I.

f) Peripl. P. E. p. 20. ib.

g) In v. Ολβία.
M. Mannert pretend (*Geogr. der Gr. u. Röm. IV. Th. S.* 83.) que cette ville s'appelloit par prééminence, τὸ ἄστυ, *la cité*, ce qui n'est pas tout-à-fait prouvé par le passage d'Hérodote (L. IV. c. 78. p. 358.) sur lequel il se fonde.

h) De Sit. Orb. L. II. c. 1. p. 126.

i) L. IV. c. 18. p. 330.

k) N. H. L. IV. c. 12.

l) Strabon. (L. VII. p. 470.) nomme Olbie μέγα ἐμπορεῖον, et Hérodote (L. IV. c. 17. p. 330. Ed. Borh.) Βορυσθενειτέων ἐμπορίων.

publié aussi plusieurs où la légende se trouve sans être tronquée, mais quelques unes ont parû douteuses à ceux qui les ont publiées, et qui ont crû qu'elles n'appartiennent pas à Olbie de la Sarmatie, mais à des villes du même nom dont neuf sont citées par Etienne de Byzance *a*). Cette question sera traitée particulièrement.

Le nom d'Olbia ne se trouve que sur le médaillon en bronze d'une grandeur extraordinaire *b*), tel que nous l'avons cité au Nr. XXVIII. Il porte OΛBIH, qui est plutôt le nom de la ville que l'abréviation d'OΛBIHNΩN. Il est vrai que le stile du dessin et la fabrique de ce beau médaillon sont tout-à-fait différens des médailles les plus communes d'Olbiopolès citées aux Nos II — XXI. Mais nous croyons pouvoir attribuer avec toute certitude à la même ville de la Sarmatie et ces dernières et le grand médaillon. Nous fondons notre sentiment sur l'observation que les figures du revers, l'aigle sur le dauphin, sont le type ordinaire de plusieurs villes situées aux bords du Pont Euxin, tel que nous l'avons trouvé sur cinq autres médailles de la même ville, No. XXVII. XXVIII. XXIX. XXX. et XXXI. Le lieu où le grand médaillon a été decouvert prouve

---

a) In v. Ὀλβία.

b) La Méthode adoptée par Ekhel pour désigner la grandeur des médailles, ne nous paroît pas assez précise. Nous l'avons suivie parceque des pièces publiées dans quelques ouvrages sont marquées de cette manière. Le médaillon dont il est question est de la grandeur N de l'échelle donnée dans le Cabinet de Hunter publié par Lacombe.

prouve la justesse de cette remarque, puisque c'est près de Stomogil, village à 35. Verstes de Cherson, que Mr. de *Suchtelen* Ingénieur Général en Chef l'a trouvé lui même avec d'autres médailles qui ornent à présent la belle collection de cet illustre et savant connoisseur, qui a eû la bonté de nous fournir, un grand nombre de celles que nous publions. Quant à la tête de Méduse de l'avers, elle nous y paroît placée comme un emblême appartenant à une nation guerrière. Les boucliers en étoient ornés, elle se trouve donc sur les médailles d'Olbiopolis à la place du coryte et de la hache, les types ordinaires de cette ville.

La figure au revers du grand médaillon est aussi sur la belle médaille en argent publiée par Pellerin et rapportée au Nr. XXXI. On la voit aussi sur une autre médaille en bronze du cabinet de Mr. de *Wiesiolovski*, que nous avons publiée au Nr. XXVII. Le stile de la dernière médaille est barbare, et pour la légende au revers BIE[illegible]OΘ[illegible]OΣ, on doit faire la remarque qui aura lieu par rapport au revers du Nr. XXIV.

Les deux médaillons rangés aux Nrs. XXIX. et XXX. méritent l'attention des amateurs. Jusqu'à présent on ne connoissoit point encore de médaillons grecs d'une telle grandeur. Le travail des Médaillons des No. XXIX et XXX. est assez grossier et principalement celui des revers, qui ne sont pas bien conservés, vû que le relief en est peu saillant.

Le

Le masque tirant la langue se voit sur les médailles de Populonie, de Camarine, de Néapolis en Macédoine, d'Abydos, et de l'île de Paros, ou de Parium en Mysie. Les savans n'ont pas été d'accord sur la signification de cette larve *a*). Sur les médailles des plusieurs villes citées elle peut faire allusion au culte de Bacchus, Divinité généralement révérée dans la grande Grèce, la Thrace et la Macédoine; car aux fêtes célébrées en son honneur on portoit des masques et on se rassembloit au théâtre. Mais sur nos deux médaillons cette larve est une tête de Méduse, le Γοργεῖον, ou Γοργόνειον, telle qu'elle se trouvoit ordinairement sur les boucliers pour inspirer la terreur et l'épouvante. Un tel symbole convient parfaitement aux habitans guerriers d'Olbiopolis. Il est encore à remarquer que nos masques ont pour coëffure un ornement très propre à former le bord d'un bouclier, dont il n'est peutêtre que l'imitation.

Nous avons vû l'aigle sur le poisson, sur d'autres médailles d'Olbie. C'étoit l'emblême de l'abondance de la pêche, avantage que la ville d'Olbie devoit à sa situation sur les bords fertiles du Hypanis près de l'embouchure du Borysthène *b*), fleuve très poissonneux *c*). La

---

a) Ekhel Num. Vet. Anecd. p. 12 — 17.
Populor. et Reg. Num. Veter. Ined. Vol. I. p. 146. Voyez surtout l'excellente dissertation de Mr. Böttiger, intitulée: *Die Furienmaske im Trauerspiele und auf dem Bildwerk der alten Griechen*, S. 107 — 112.

b) Ptolem. L. III. c. 5. p. 74.

c) Scymn. Ch. Fragm. v. 66 — 68. Ap. Geogr. Vet. Min. Huds. Vol. II: p. 47: Οὗτος

La suite des médailles d'Olbie que nous nous empressons de Vous communiquer, nous met dans le cas de fixer quatre époques et d'assigner à chacune les médailles qui lui appartiennent. Les médailles de Nrs. II — XXI. sont probablement les plus anciennes de toutes, elles ont été frappées vers le tems de Philippe et d'Aléxandre le Grand, comme on le voit par la forme des caractères de leur légendes. Les types d'un travail assez grossier prouvent que dans cette ville, quoique très florissante, on ne se piquoit ni de finesse ni d'élégance dans les coins. Mais le grand médaillon du Nr. XXVIII. appartient à une époque postérieure, étant d'un goût tout-à-fait différent et plus épuré. Il fut sans doute frappé dans un tems où les habitans d'Olbiopolis avoient fait plus de progrès dans les arts qui appartiennent au dessin, s'il ne doit pas son origine à une circonstance particulière ayant plutôt servi de médaille, comme nous le disons, que de monnoie courante, supposition que justifie sa grandeur extraordinaire.

Le morceau qui a été placé au Nr. I. est d'une époque moins ancienne que celle que nous avons assignée aux

---

Οὗτος (ὁ Βορυσθένης) δὲ πάντων ἐστὶ χρειωδέστατος,
Κύτη μεγάλα καὶ πολλὰ καὶ καρπούς φέρων
Τοὺς ϕυομένους νομάς τε τοῖς βοσκήμασι.
Herod. L. IV. c. 53. p. 305.

Mela de Sit. Orb. L. II. c. 1. p. 126: *Borysthenes inter Scythiae amnes amoenissimus, turbidis aliis, liquidissimus defluit placidor quam caeteri, potarique pulcherrimus.*

aux médailles II — XXI. Au lieu de la tête barbue sans attribut, elle porte une tête de Pan surmontée d'une corne et exécutée avec beaucoup de délicatesse.

Ayant ainsi distingué deux classes dans les médailles d'Olbie, nous publions encore un morceau très remarquable, d'un goût tout-à-fait différent. C'est avec le même degré de certitude qu'on doit classer parmi les médailles de notre ville de la Sarmatie d'Europe cette médaille en grand bronze rapportée au Nr. XXXII. D'un côté on voit une tête d'Apollon, au champ le coryte, ou l'étui de l'arc et des flèches, avec l'arc dont on distingue la partie qui reste à découvert. Le coryte étant l'embleme favori de la ville d'Olbie, on n'a pas voulû l'omettre même sur une médaille chargée de types différens, et on l'a figuré dans une très petite dimension. Le coryte est surmonté d'un monogramme composé des lettres XAP, qui sont probablement les lettres initiales du nom d'un magistrat nommé Charicles, Charidème ou Charmides, sous l'administration duquel la médaille a été frappée avec son portrait. Au dessous de la tête se trouve le caducée ailé en contremarque, qui efface la cinquieme syllabe de la légende d'ΟΛΒΙΟΠΟ..ΙΤΩΝ. Il seroit difficile de déterminer le motif qui fit placer cette contremarque sur notre médaille. Nous parlerons ailleurs de quelques d'autres médailles portant cette contremarque. Peut-être que de nouvelles découvertes contribueront à éclaircir ce fait. Nous voyons par la forme des lettres et principalement de l'Oméga, que cette médaille n'a pas été frappée avant le milieu du premier siècle, ou le commencement du second.

Le

Le revers présente un oiseau, mais les lettres ΑΔƆΘ.... ΔΦΟΥ.., ne sont pas susceptibles d'explication.

La médaille citée au No. XXXVII. avec le portrait de l'Empereur Caracalla, est la seule médaille impériale d'Olbie, qui ait été découverte jusqu'à présent. Mr. de *Wiesiolovski* nous l'a communiquée. Cette médaille qui appartient à la quatrième époque de l'histoire métallique de cette ville, nous apprend que la Sarmatie étoit une province romaine sous le règne de cet Empereur, on peut supposer qu'elle l'étoit déjà depuis quelque tems, puisque la ville d'Olbie avoit reçu d'Antonin le Pieux des secours contre les Tauroscythes, que ses troupes vainquirent et forcèrent à donner des otages aux Olbiens *a*).

La ville d'Olbiopolis a été pendant long tems dans un état florissant. Dion Chrysostome, qui s'y trouvoit sous le règne de l'Empereur Trajan, prétend qu'alors elle étoit déjà déchue de son ancienne grandeur, et que les incursions des peuples barbares ses voisins l'avoient ruinée. Ils avoient démoli une grande partie de la ville et des fortifications, et renversé les statues dans les temples et sur les tombeaux. Ce fut environ 150 ans auparavant que les Gètes firent à Olbie leur dernière incursion, celle dont cette malheureuse ville eut le plus à souffrir. Une grande partie de cette ville étoit déserte lorsque Dion y vint. Il n'y avoit qu'une foible muraille assez basse, et plusieurs tours des anciennes fortifications se trouvoient si éloignées de la

a) Capitolin in Anton. c. IX. p. 270 — 271.

ville habitée, qu'elles ne paroissoient pas en dépendre *a*). Quelque tems après l'Empereur Antonin y envoya des secours, lorsque les Tauroscythes la ménaçoient d'une invasion *b*). Olbie existoit encore au quatrième siècle de notre ére *c*), et un auteur du sixième *d*) en parle comme d'une ville florissante. A-t-il suivi des relations d'écrivains plus anciens que lui, ou a-t-il puisé cette notice dans les écrits des voyageurs de son tems, c'est ce que nous ne hazarderons pas de décider. On ne sait pas non plus indiquer l'époque à laquelle la ville d'Olbiopolis fut détruite, Constantin Porphyrogénète, écrivain du neuvième siècle, n'en faisant aucune mention.

La ville dont nous donnons les médailles étoit nommée, comme nous l'avons observé plus haut, Milétopolis, Olbie ou Olbiopolis. Le premier nom, dérivant de sa Métropole, paroît avoir été le plus ancien. Dans la suite, après l'accroissement de son commerce et de son industrie, la ville reçut les derniers noms que nous avons retrouvés sur les médailles, tandis qu'aucune ne porte le premier.

Il faut observer encore, que cette ville étoit déjà connue du tems d'Hérodote sous le nom de Borysthènes *e*), ou

---

a) Borysthen. p. 74 — 77. Ed Reisk. Vol. II.

b) Capitolin. in Anton. c. IX. p. 270 — 271. Ed Salm. et Casaub.

c) Ammian. Marcellin. L. XXII. c. 8. p. 203.

d) Jornand. Get. c. V. p.

e) Strab. Steph. et Plin. LL. CC.

ou Borysthénis *a*), provenant du fleuve Borysthènes à l'embouchure duquel elle étoit bâtie. Mais quoique Pline *b*) et Scymnus *c*) assurent, que cette denomination étoit postérieure à celles de Milétopolis et d'Olbiopolis, et que Dion Chrysostome *d*), Ammien *e*) et Jornandes *f*) ne citent que le premier nom, il paroît que les habitans grecs ne s'en servoient point pour désigner leur ville, mais plûtot qu'il n'indiquoit qu'une partie du territoire d'Olbie, celle qu'habitoient les Scythes, comme on peut s'en convaincre en lisant un passage d'Hérodote *g*), que nous citerons encore plus bas. Les Scythes s'appropriant aussi le nom d'Olbiopolites, il s'en suit que le nom de Borysthénites ne peut se trouver sur aucune médaille. Méla *h*) cite Borysthénis

 et

---

a) Ptolem. Geogr. L. III. c. 5. p. 74. Ed. Mont. Mela. L. C.

b) Nat. Histor. L. IV. c. 12. sect. 26. pag. 217: *Borysthenes lacusque et gens eodem nomine et oppidum. — Olbiopolis et Miletopolis antiquis nominibus.*

c) Peripl. v. 56 — 60. ap. Geogr. Min. Huds, Vol. II. p. 46:

Επὶ δὲ ταῖς καθ' Ὑπάνιν καὶ Βορυσθένην
Τῶν δυσὶ ποταμῶν συμβολαῖς ἐξὶ πόλις
Κτισθεῖσα, πρότερον Ολβία καλουμένη·
Μετὰ ταυθ' ὑφ' Ἑλλήνων πάλιν Βορυσθένης
Κληθεῖσα.

d) Borysthen. p. 74. Vol. II. Opp. Ed. Reisk.

e) L. XXII. c. 8.

f) Get. c. V. p. 23.

g) L. IV. c. 18. p. 330. Ed. Borh: Σκύθαι γεωργοί· τοὺς Ἕλληνες οἱ οἰκέοντες ἐπὶ τῷ Ὑπάνι ποταμῷ καλέουσι Βορυσθενείτας· σφέας δὲ αὐτοὺς, Ολβιοπολίτας.'

h) De Sit. Orb. L. II. c. 1. p. 126. Ed. Gron.

et Olbie comme deux villes différentes, et Jornandes s'accorde avec lui, ce qui prouve l'intégrité du texte de Méla et l'inutilité de la correction faite par Pintianus à l'endroit cité.

Il seroit intéressant de comparer nos médailles avec celles du cabinet de Mr. *Ainsley* citées aux Nos. XXXIV. XXXV et XXXVI. La légende de quelques unes de ces médailles porte ΟΛΒΙΟΠΟΛΕΙΤΕΩΝ au lieu d'ΟΛΒΙΟΠΟΛΕΙΤΩΝ. Mr. l'Abbé *Sestini* qui les a décrites n'en a pas donné la figure. D'ailleurs cet habile connoisseur n'ose pas lui même les référer à Olbie de la Sarmatie, ni à aucune autre ville du meme nom *a*). Mais elles appartiennent à Olbiopolis de la Sarmatie aussi bien que celles sur lesquelles on voit la tête d'Apollon et la lyre, emblêmes très convenables pour une colonie des Miésiens, dont Apollon étoit le Dieu tutélaire, comme l'a déjà observé Mr. l'Abbé *Sestini b*). Nous avons cité ces médailles aux Nos. XXXIII et XXXVI.

La médaille du No. XXV. que Pellerin a publiée sans l'attribuer positivement à Olbie de la Sarmatie *c*), à cause de la fabrique entièrement différente, a été rangée avec raison par Ekhel au nombre des médailles de cette ville.

Il

---

a) Lettere e Dissertaz. To. IV. p. 90.

b) Descript. Numor. Veter. p. 29.

c) Lexic. Univ. Rei Numar. To. III. P. II. p. 75.

Il faut ici relever une erreur qui se trouve dans l'ouvrage très utile de Mr. Rasche. La médaille d'Olbie, No. VII. de notre collection, s'y trouve rangée à la tête de celles d'Olbe au Olbase, ville de la Pamphylie, parceque l'auteur a suivi l'opinion de Froelich, de Gessner et de l'auteur du Museum Théupoli.

Les types de la médaille placée au No. XXVI. se distinguent d'avec les coins ordinaires d'Olbiopolis. Quoique la fabrique ne soit pas la même dans les pièces qui la précèdent ni au No. XXVII. cette médaille appartient néanmoins à notre ville de la Sarmatie, puisque la tête sur l'avers, d'un travail grossier, ressemble sous le rapport du goût aux médailles qui portent une tête barbue. D'ailleurs cette pièce a été trouvée dans l'emplacement de l'ancienne ville d'Olbie ainsi que toutes les médailles que nous vénons de publier.

Les types des revers des Nos. XXIV. et XXVI. ne nous permettent pas de déterminer ce qu'ils représentent. Cette incertitude ne provient pas de la mauvaise conservation de ces médailles, mais de leur fabrique grossière. Ce qui nous paroît le plus vraisemblable, c'est que l'on a voulu représenter une proue de vaisseau. N'ayant point jusqu'à présent remarqué de flèche sur les médailles d'Olbiopolis, nous ignorons si deux médailles du cabinet de Mr. Ainsley publiées par Mr. Sestini, et rangées aux No. XXXIII. et XXXIV. XXVIII. et XXIX. ne portent pas plutôt la même figure indistincte que l'on voit sur

nos

nos médailles. La proue de vaisseau feroit alors allusion au commerce maritime de la ville d'Olbiopolis.

On doit regarder comme des morceaux très curieux les médailles décrites aux No. XVI. et XXIV. La petite contremarque sur les revers ayant les mêmes types que les revers eux-mêmes, nous prouve, qu'elle doit son origine aux habitans d'Olbie que les circonstances peuvent avoir forcés de faire un changement dans la valeur de leur monnoie. C'étoit un expédient employé par Leucon *a*) et Denys le tyran *b*) pour doubler la valeur de la monnoie courante de leur païs. La contremarque que l'on y ajoutoit pour cet effet est nommée Χαραχτὴρ.

Le type des médailles No. II. — XXI. que nous croyons les plus anciennes de cette ville, a été sujet à différentes explications. Nous nommons simplement tête barbue et cornue *c*) celui de l'avers. La comparaison de plusieurs de ces têtes et leur analogie avec celles qui sont sur les médailles de la Chersonèse Taurique, nous engagent à les attribuer plutôt au Dieu Pan qu'à toute autre Divinité. Ce Dieu est réprésenté, comme les Satyres, tantôt avec des cornes ou des oreilles pointues, tantôt sans aucun de ces attributs.

C'est

---

a) Polyaen. Strateg. L. VI. c. 9. p. 564. Ed. Maasv.

b) Aristot Oecon. L. II.

c) Corrigez dans l'ouvrage d'Ekhel (Doctr Num. Vet. P. I. Vol. II. p. 34. dernière ligne du texte) une faute typographique, et lisez *Jouis* au lieu de *bouis*.

C'est ici le cas de remarquer quelques inexactitudes commises par tous les écrivains numismatiques par rapport aux revers des mêmes médailles qu'ils ont citées ou publiées. Ils nomment carquois ce qui n'est que l'étui où se plaçoit l'arc, lorsqu'on ne s'en servoit pas. Cet emblême particulier aux médailles d'Olbie est le Corytus *a*), Χωρυλὸς *b*) ou Γωρυλὸς *c*), Τοξοθηκὴ *d*), l'étui de l'arc. Il servoit aussi souvent de carquois, pouvant renfermer l'arc et les flèches *e*), et celui que nous voyons sur les médailles d'Olbiopolis est de ce genre. On voit un coryte servant au même usage sur une médaille d'Antiochus I. Soter

---

a) Serv. in Aen. L. X. v. 169.
Lactant. in Stat. Theb. L. IX. v. 730.

b) Etymolog. in v. Γῶ.

c) Hom. Odyss. L. XXI. v. 53 — 54:

— — — ἀπὸ παστάλου αἴνυτο τόξον
Αὐτῷ γωρυτῷ, ἔς οἱ περίκειτο φαεινός.

d) Schol. Aristoph. L. C.

e) Etymolog. L. C: Χωρυτὸς ἡ τῶν βελῶν θήκη, χωρυτὸς τις οὖσα, παρὰ τὸ χώρειν τὰ ξυτὰ, ταῦτ' ἐστὶ τὰ τόξα, ἢ τὰ βέλη, εἰς ἣν τὰ ξυτὰ χωρεῖται.

Schol. Hom. in Odyss. L. C: Γωρυτὸς ἡ θήκη τοῦ τόξου.
Sil Ital. Punicor. L. VII. v. 443 — 445:

Paruulus ex humero corytus et aureus arcus
Fulgebat, nutuque uetans trepidare parentem
Monstrabat grauidam telis se ferre pharetram.

Serv. L. C. *Proprie coryti sunt arcuum thecae, dicuntur etiam sagittarum.*

Soter *a*), et dans les mains de Philoctète sur une pierre gravée du Baron Stosch *b*. A côté du coryte se trouve sur toutes ces médailles d'Olbie, la hache, Πέλεκυς, en usage chez les peuples barbares, comme les Gaulois, les Thraces et les Amazones. Les Olbiens, quoique Grècs de nation, l'avoient adoptée parmi leurs instrumens de guerre, afin de combattre à armes égales les Tauroscythes, que le voisinage rendoit souvent leurs ennemis. Les Athéniens se servoient également de la hache, du tems de Thésée, qui sur le fronton du temple de Jupiter Olympien étoit représenté armé de cet instrument et combattant contre les Centaures *c*). Dans la suite il n'y eut chez les Grècs qu'une partie de la cavalerie légère qui fût armée de haches *d*).

Parmi les médailles d'Olbiopolis qui nous paroissent être les plus anciennes, il y en a quelques unes qui portent, outre l'inscription ΟΛΒΙΟ, des lettres à côté de la hache. Ce sont celles des Nos. V — XXI. Il y en a d'autres, où ces lettres ne se trouvent pas No. I — IV. Ces médailles

a) Peller. Rec. de Medaill. To. III. pl. III. No. 7.

b) Winkelm. Mon. Ant. Ined. No. CXIX.

c) Pausan. Eliac. I. c. 5. p. 42. Ed. Fac.

d) Pausan. Phoc. c. XX. p. 220.
Suid. in v. Ἱππική.

Winkelmann qui cite ce passage de Suidas (Monum. ined. p. 80) croit que cet auteur parle de l'infanterie. Mais il n'en est pas question, et les anciens monumens avec les batailles des Amazones nous prouvent que la hache étoit l'arme particulière de la cavalerie légère.

dailles étoient toutes inconnues avant mes recherches, à l'exception de No. VII. et de celle publiée par Pellerin portant les lettres ΔΙ, No. X. de notre recueil. Alors sans doute il étoit permis de supposer que ces lettres ΔΙ marquoient le numero XIV. et avoient rapport à une époque de l'histoire de cette ville d'Olbie, ou à la durée de quelque magistrature. Mais les médailles que nous publions à présent, marquées des lettres ΑΘ. ΑΠ. ΑΡ. ΑΡΙ. ΒΟΣ. ΕΠ. ΗΓ. Η ΠΕΕ. ΘΕ. ΘΕΥ. ΙΚ. ΜΕ. ΜΙ. ΟΥ. ΤΥ. nous prouvent qu'une telle supposition ne peut pas avoir lieu, et que ce ne sont probablement que les lettres initiales du nom des magistrats de cette ville.

Il est encore à remarquer que la médaille rapportée au No. XIII. doit être mise au nombre des médailles les plus rares de la ville d'Olbiopolis, parcequ'on y voit au lieu de la tête barbue celle d'Hercule jeune couverte de la peau du lion.

Nous finissons en observant, que la médaille citée au No. XVII. portant sur son avers la tête barbue et cornue, est la plus belle par rapport à sa conservation. En effet elle est à fleur de coin, couverte du plus beau vernis verd, et le caractère de la tête est tout-à-fait différent de celui des têtes que l'on trouve ordinairement sur ces médailles.

La médaille de la Chersonèse Taurique dont nous devons rendre compte suivant l'annonce que nous avons faite au commencement de notre lettre, est un morceau

 d'une

d'une très grande rareté. C'est une médaille en petit bronze de la conservation la plus parfaite, frappée dans la ville de Théudosie dont les médailles n'ont point été connues jusqu'à présent. En voici la description:

Tête virile imberbe casquée.

ΘΕΥ. Le coryte et la massue. Fig. XXIII.

AE. III

Cette belle médaille peut servir à déterminer le vrai nom de cette ville, appellée *Théodosie* par Ptolemée *a*), Strabon *b*), Pline *c*), Méla *d*), Arrien *e*), et Ammien *f*); et Théu-

---

a) Geogr. L. III. c. 5. p. 74.
Tab. Urb. Insign. p. 16.

b) Geograph. L. VII. p. 475 — 476.

Casaubone a raison de supposer (Not. in Strab. L. C.) que le texte de Strabon cité par Etienne de Byzance portoit anciennement Θευδοσία. C'est donc par erreur que Berkel (Not. in Steph Byzant. in v. Θευδοσία) rejette l'autorité des manuscrits du dernier auteur, dans lesquels on lit Θευδοσία au lieu de Θεοδοσία, quoique l'ordre des lettres dans le dictionnaire d'Etienne, tel que nous l'avons à présent, et sur lequel se fonde Berkel, soit un argument en faveur de la dernière orthographe.

c) Nat. Hist. L. IV. c. 12. s. 26. p. 218.
On trouve aussi dans quelques manuscrits *Theudosia*.

d) De Sit. Orb. L. II. c. 1. p. 122.

e) Peripl. Pont. Eux. p. 20. ap. Geogr. Min. Huds. Vol. I.

f) Histor. L. XXII. c. 8.

Théudosie par Scylax *a*), Démosthène *b*), Polyen *c*), Appien *d*) et Etienne de Byzance *e*). Quoique tous les deux noms reviennent au même, et que le dernier, Théudosie, provienne de la prononciation en dialecte éolien *f*), il est pourtant intéressant d'observer, que notre médaille vient à l'appui du sentiment des derniers auteurs. Elle nous fait voir, que le dialecte éolien étoit en usage dans cette ville, et que Théudosie étoit le nom employé dans les monumens publics de la ville.

D'après une tradition qu'Ulpien nous a conservée *g*), la ville avoit tiré son nom de Théodosie, fille ou soeur du roi Leucon. L'auteur anonyme du Périple du Pont euxin *h*), nous apprend que la ville de Théudosie étoit appellée dans le deuxieme siècle en langue tauroscythe *Ardauda*, c'est-à-dire, *ville à sept Divinités*. Ce nom renferme une allusion qu'il n'est pas possible d'expliquer.

---

a) Peripl. p. 29. ap. Geogr. Min. Huds. Vol. I.

b) Advers. Leptin. p. 567. Ed. Reisk.
Advers. Lacrit. p. 596. Ed. Volf. Bas. 1572.

c) Strategem. L. V. c. 23. p. 509. Ed. Maasv.

d) Bell. Mithrid. p. 407 et 419. Ed. Toll.

e) In v. Θευδοσία.

f) Les Eoliens prononçoient et écrivoient Υ au lieu de Ο. Ils disoient par exemple ὐμφαλὸς, μύγις, ὔμοιον, au lieu de ὀμφαλὸς, μόγις, ὅμοιον. Voyez sur cela Jean le Grammairien.

g) In Demosth. Orat. in Leptin. p. 129. Ed. Volf. Bas.

h) P. 5. ap. Geogr. Min. Huds. Vol. I.

La légende de notre médaille ΘΕΥ ne porte que les initiales de ΘΕΥΔΟΣΙΑ ou de ΘΕΥΔΟΣΙΕΩΝ ou ΘΕΥΔΟΣΙΑΝΩΝ *a*).

Le travail de l'avers de notre médaille est du plus beau stile. Il représente une tête casquée, peut-être celle d'un des Tyrans qui régnoient au Bospore, et étoient maîtres des villes grècques circonvoisines, avant que Mithradate en fit la conquête *b*). Cet avers ne le cède point aux plus belles médailles de Philippe, d'Alexandre et de Lysimaque. Les lettres du revers sont garnies de petits points à leurs extrémités. On peut donc supposer avec raison, que notre médaille a été frappée à peu près du tems de ces Rois.

Le coryte et la massue sont les armes des nations barbares, comme nous l'avons observé ci-dessus par rapport à la hache. Elles furent adoptées par les habitans de la ville de Théudosie, où les arts et le commerce florissoient. La colonne de Trajan nous représente les Daces combattans avec des massues et une des Amazones en est armée sur un basrélief de la villa Borghese *c*).

La

---

a) Steph. Byz. in V. C.

b) Strab. Geogr. L. VII. p. 476 — 477.
Justin. L XXXVII. c.

c) Wink. Mon. Ant. Ined. No. CXXXVII.

La ville de Théudosie étoit célèbre par la fertilité du sol, par la sureté de son port, qui pouvoit contenir cent vaisseaux *a*), et par son grand commerce de bled avec la ville d'Athènes *b*). Elle a été fondée par les Milésiens *c*) et elle tomba ensuite au pouvoir des Rois du Bospore *d*). mais Théudosie n'existoit déjà plus au deuxième siècle. Les limites du royaume du Bospose s'étendoient avant Strabon jusqu'au port de Théudosie, qui servoit aussi de frontière pour le païs des Tauroscythes *e*).

Mr. La Combe avoit pris une médaille en bronze de Métaponte de la Lucanie pour une médaille de la ville de Théudosie. Sur cette médaille on voit d'un côté Mercure debout, de l'autre un épi d'orge, avec l'inscription ΘΕΟΔΟC *f*). Mais les types et la fabrique de la médaille, comme aussi la forme des lettres Θ et C, ne repondent pas à cette assertion, déjà désapprouvée par Ekhel *g*). Le nom

---

a) Strab. L. VII. p. 475 — 476.

b) Demosth. in Lept. p. 467. Ed. Reisk.

M. Heeren a confondu la ville de Théudosie avec celle d'Olbiopole. Voy. son ouvrage classique: *Ideen über die Polit. den Verk. u. d. Hand. der vornehmst. Völk. d. alt. Welt.* II. Th. S. 780.

c) Arrian. Peripl. Pont. Eux. p. 20. ap. Geogr. Min. Vol. I.

Anonym. Peripl. Pont. Eux. p. 5. ibid.

d) Appian. Bell. Mithrid. p. 407. et 419.

e) Strab. L. C.

f) Num. Guil. Hunter. tab. IX. fig. 7. p. 325.

g) Doctr. Num. Veter. P. I. Vol. II. p. 3.

Sestini Geogr. Numism. P. II. p. 20.

nom du magistrat Théodosius a induit La Combe en erreur, en lui faisant attribuer cette médaille à notre ville de la Chersonèse Taurique.

---

1. *Tête d'Hercule imberbe couvert de la peau du lion.*

HPAK . Arc et massue. Fig. XXIV. AE. II.

Ekhel Catal. Mus. Caes. Vindob. To. I. p. 47. tab. 11. fig. 1.
Ej. Doctr. Num. Veter. P. I. Vol. II. p. 2 — 3.

2. *La même tête.*

HPAKΛ . L'arc et la massue, avec un appendice à ce dernier attribut, en forme de globe. Fig. XXV. AE. II.

Millin Monum. ined. To. I. pl. II. p. 13 — 17.
Mionnet Collect. d'Empr. No. 356, p. 19.

3. *La même tête.*

HPA . L'arc et la massue. AE. III.

Au trésor Frédéric à Gotha.

La patrie de ces médailles nous paroît encore problématique. Leur légende HPAKΛ, l'abréviation de HPAKΛEΩN, HPAKΛEIΩN, ou HPAKΛEIΩTΩN, indique une des anciennes villes qui tiroient leur nom d'Hercule, et en effet on voit son portrait et ses armes sur les deux médailles citées. Ekhel, qui a publié la première de ces médailles, la croit de Héraclium, ville dont parle Ptolémée *a*) qui la place sur cette partie des côtes de la Tauride

---

a) Geogr. L. III. c. 5, p. 75.

ride qui se trouve baignée au nord par les eaux du Palus Méotide. Cette opinion a été adoptée par Mr. Millin, éditeur de la médaille du No. II. Mais Mr. La Porte du Theil *a*) ne veut pas partager le sentiment de ces deux savans, parceque Ptolémée, dit il, est le seul Géographe qui parle de la ville d'Héraclium. Le silence de Strabon, de Méla et d'Etienne de Byzance lui prouve, ou qu'ils n'en avoient eû aucune connoissance, ou que cette ville étoit trop peu importante pour être citée avec les vingt-trois de ce nom dont le dernier écrivain fait mention *b*). D'ailleurs il reclame l'autorité de Strabon *c*) et de Pline *d*), qui appellent la ville de Chersonèse en Tauride *πόλιν Ἡρακλεωτῶν* et *Heraclea - Cherronesus.*

On pourroit convenir que les argumens en faveur de Mr. du Theil sont assez spécieux et qu'ils nous donneroient de plus grandes probabilités, quant à la vraie patrie de ces médailles que ne le fait l'idée de Mr. Ekhel, si Ptolémée eût fait seul mention de cette ville d'Héraclium. Mais l'assertion de Mr du Theil doit être refutée d'après un passage de Strabon, où ce célèbre Géographe, en traitant de l'Asie, fait une digression qui indique très clairement l'ancien site d'Héraclium dont Mr. du Theil revoque en doute l'existence même. Strabon nous dit: „sur le rivage opposé

a) Biblioth. franc. red. p. Pougens, II. Ann. No. XI. p. 7 — 17.

b) In v. Ἡράκλεια.

c) Geogr. L. VII. p. 474.

d) Nat. Hist. L. IV. c. 26. p. 171.

„opposé à l'Achilléum se trouve le village Myrmécion, et „le village et promontoire Parthénium, très près d'Héra„clium" *a*). Le texte de Strabon est à la vérité corrompû dans ce passage, mais la correction faite par Casaubone est si évidemment juste, qu'il est inutile de s'arrêter à l'idée de ceux qui prétendent que la citation d'Héraclium n'est que la remarque d'un copiste. D'ailleurs Ptolémée et Strabon sont parfaitement d'accord sur l'emplacement de cette ville. Voici donc l'existence de Héraclium bien constatée. Mais si néanmoins on vouloit être du sentiment de Mr. du Theil et que les deux médailles que nous avons publiées parussent plutôt devoir être attribuées à Heraclée-Cherronesus qu'à l'Héraclium cité par Ptolémée et Strabon, nous devons indiquer ici tout ce qui détruiroit encore une telle opinion. Remarquons donc en premier lieu, que la fabrique de ces médailles est trop barbare pour être l'ouvrage des Héracléens de la ville de Cherronèse, une des plus florissantes de la Tauride et celle dans laquelle, selon Pline *b*), on avoit conservé les moeurs et les usages de la Grèce. Ces Heracléens n'avoient point avec les habitans primitifs de ce païs cette liaison qui existoit à Olbie entre les Grecs de Milet et les Scythes, comme nous l'avons prouvé. Cette observation seroit donc en faveur de l'opinion de Mr. Ekhel, surtout depuis que nous avons mieux constaté l'existence de la ville de Héraclium.

Les

---

a) Geogr. L. XI. p. 756: ἔχων ἐν τῇ περαίᾳ τὸ Μυρμήκιον κώμην, καὶ τὸ Παρθένιον· πλησίον δ' ἐστὶ τοῦ Ἡρακλείου τὸ Παρθένιον.

b) L. C: *Praecipui nitoris in toto eo tractu, custoditis Graeciae moribus*

Les types de ces médailles, l'arc et la massue, sont, à la vérité, les emblêmes qui se trouvent ordinairement sur les médailles de la Chersonèse Taurique et de la Sarmatie d'Asie; la fabrique de nos médailles ayant aussi beaucoup de ressemblance avec celles de ces contrées. Mais il faut observer en second lieu, que dans le grand nombre de médailles trouvées depuis plusieurs années dans la Tauride et dans les deux Sarmaties, nous n'en avons jamais rencontré une seule de Héraclium semblable à celles que nous publions ici *). Ajoutons encore que Mr. Ekhel dit en avoir vû un grand nombre *a*), que Mr. l'Abbé Sestini nous assure, que beaucoup de médailles semblables lui ont été apportées de la Carie *b*), et il y aura beaucoup d'invraisemblance dans l'opinion qui leur donne la Chersonèse Taurique pour patrie. Doit-on donc les attribuer à l'Héraclium de Ptolémée et de Strabon, ou plutôt à Héraclée au Pont, ou à celle en Bithynie? C'est une question qui ne peut être décidée que lorsque de nouvelles découvertes nous auront donné des éclaircissemens ultérieurs à ce sujet.

Il seroit également difficile d'expliquer ce que signifie cet appendice au milieu de la massue au revers du Nr. II. Il servoit, nous dit le savant éditeur de cette médaille

---

a) Doctr. Num. Veter. L. C.

b) Geogr. Numism. P. II. p. 19.

daille *), a manier la massue, à la retenir sur l'épaule ou à la suspendre. Avouons que quoique cette courroie, Ἄμμα, par laquelle on manioit peut-être la massue, ne soit pas placée à un endroit convenable, cette idée n'est pas dénuée de vraisemblance.

Mais nous craindrions de passer les bornes que nous nous sommes prescrites dans la lettre que nous avons l'honneur de Vous adresser, si nous nous étendions davantage sur les anciens monumens de la Chersonèse Taurique. C'est une matière qui mérite d'être traitée avec des détails plus particuliers.

Qu'il me soit permis, *Messieurs*, de Vous assurer de toute ma considération, agréez-en l'hommage respectueux.

Koehler.

---

*) Monum. Ined. L. C. p. 16.

DUBIA
CONTRA *JOSEPHI GALL*
de organis in cerebro distinctis, iisque cranii ope detegendis, hypothesin.

Auctore

Carolo Asmund Rudolph.

Exhibita in Conventu die 23 Febr. 1803. et lecta die 30 Maj. 1804.

Nostra aevi cognitionem anatomicam si cum veterum placitis comparamus, de successu, quocum recentiores in microcosmo indagando occupati fuere, non possumus, quin nobis gratulemur. Plurima vero, antecessoribus occulta, nobis clara fulgere, non est quod mireris, artis enim cultorum numerus quotidie augetur; datur ubivis et facillime tam homines, quam bruta secandi occasio; administrationem denique anatomicarum ratio multiplicatur.

Inter omnes corporis nostri partes cerebrum praecipue anatomicorum in se vertit oculos; partium ejusdem et formam et nexum optime exposuere, adnotavere aberrationes in eodem maxime notabiles, humani denique et bestiarum encephali comparationem — si temporis, in qua culta fuit, ratio habetur — satis perfectam reddidere. Si-

mulac vero in singularum illius partium usum inquirimus, labyrinthum intramus, in quo filum Ariadneum adhuc desideratum est.

Josephum Gall, virum egregium, isto ex labyrintho exitum promittere, nemo ignorat, et quam observationibus physicis innisus condidit theoriam, medicorum et Philosophorum numerus non exiguus summo cum applausu acceptam fovet. Hypothesis autem, quo plura promittat, eo magis, ne arbitraria recipiatur, curae cordique nobis sit.

Vir ingeniosissimus itaque cum mihi novae theoriae dogmata Viennae traderet, quaelibet ejusdem momenta caute ponderabam, variaque, quo minus stabilita videri possit, exsurgebant dubia. Haec tum temporis cum viro dilectissimo communicavi, et ipse, ut theoriam magis magisque perlustrarem, et quae contra eandem orirentur dubia, publici juris facerem, auctor fuit. Ab eorundem enim, qui suas hypotheses dubiis majores putant, aut iisdem offendantur, abhorret opinione, ita lut quae jam theoriae opponam argumenta, metaphysica cum non sint, amice ab eodem assumta iri, persuasissimus sim.

Ordo, quem in dijudicanda hypothesi secutus sum, si minus placet, lectorum veniam me facile impetraturum spero, in physiologicis enim ex causis notissimis nihil eo magis arduum, et pro sua quilibet theoria alium aliumve sequitur.

Ani-

Animalium seriem oculo attento si perscrutamur, in simplicissimis v. c. infusoriis et vermibus intestinalibus *) cerebrum nervosque distinctos non offendimus, attamen vero cum et sensus et motus prodant, reliquae eorum corporis materiae nerveam quoque immixtam esse, Scarpae, Hunteri, aliorumque hypothesis non est rejicienda. In vermibus magis compositis nec non insectis nervos distinctos habemus, de quibus Willisii, Swammerdamii, Lyonneti, Scarpae, Mangili aliorumque icones, qua partem nitidissimae consulantur. Ipse vero cum in plurimis systema nervosum cultello subjecerem, et ditissimam hujus generis collectionem in theatro zootomico Parisiensi apud Cuvierum summa cum attentione contemplatus sim, cerebrum in plurimis desiderari, et totum eorum systema nervosum non cum cerebro et medulla spinali, sed potius cum nervo sympathico magno animalium perfectiorum comparandum esse, celeberrimo Girardo, anatomes in schola veterinaria Alfortensi professori meritissimo facillime darem. In systematis Linnaeani clas-

*) Cel. *Cuvier* (in libro anatomen comparatam tradente, perquam egregio es sine pari) Ascaridi lumbricoidi, tam hominis, quam equi, systema nervosum adscribere, et in reliquis intestinalibus nobis tantum latere, non deesse, hypothesin dedisse, me non fugit, at ipsa ejus descriptio huic sententiae contraria, et illam potius probat, quam in diario Cl. *Wiedemann* zoologico et zootomico fusius a me expositam hic tantum indigitavi. In Ascaridibus dictis lineae longitudinales binae musculos transversos colligentes cl. viro, et jam ante eundem Wernero, pro nervis habitae. In Strongylo giganteo mihi dicto, vermium omnium teretium longe maximo, in Echinorhyncho Gigante et omnibus reliquis intestinalibus, quos examinavi plurimos, nervorum ne vestigium quidem cultelli ope detegitur.

classibus prioribus quatuor nec cerebrum nec medullam spinalem desiderari, neminem fugit.

Animaliā omnia cum vita fruantur, sed non itidem omnia cerebro gaudeant, hoc ad vitam animalem constituendam non essentiale dici posse, jure colligitur. Huic eo magis standum, cum foetus tam humani, quam brutorum non raro cerebro quin et simul medulla spinali destituti, ceteroquin vero maturi et vivi in lucem edantur. Quid? quod interdum partes tantum foetuum excluduntur, sed itidem maturae, harum exemplo sit foetus cervi, in theatro zootomico Parisiensi servatus, qui extremitatibus tantum posterioribus (genitalibus masculis et ano additis) consistit, ut caput, truncus, et extremitates anteriores desint. Nervi in ejusmodi casibus quum non desiderantur, hos a cerebro ortum non ducere evincitur, quod praetereundo moneam. — Hisce denique vermes addo, quorum nonnulli sectione transversa divisi optime regenerantur, ut utraque pars tandem vermem perfectum sistat, et vitam conservaverit, licet in altera tantum parte cerebrum adesse potuerit. Optimum certe vitae absque cerebri auxilio protractae documentum!

Cerebrum vero cum vitam non constituat animalem, an quod pro sensorio communi habeatur, dignum est? Dignum omnino. Homo, qui omnia reliqua animantia animae viribus longe superat, cerebro excultissimo, et si cum nervis comparatur, maximo ornatus incedit; omnes et singulae corporis humani partes salva conscientia salvoque intellectu passim laesae observantur, encephali autem laesi-

siones graviores, praesertim subitaneae, eosdem semper vel turbant, vel tollunt.

Alteram prae ceteris in cerebro excellere partem, ut huic tantum sensorii communis spartam concedas, non videmus. Quaelibet hinc inde absque mentis jactum laesa, est, cum e contra laesio major quavis in cerebri parte exitiosa sit. Interiorum partium laesio quibusdam gravior visa, at nonnisi plurima destruendo ad interiora veniri, indeque exitum fatalem facile explicari, alio loco monui. Multa ferri posse, praesertim ubi labes encephali sensim subnascitur, experientia quotidiana docet, ut exemplis supersedeam. Omnes cerebri partes vel vere duplices, vel saltem symmetricae sunt, ut harum quoque duplicitas quaedam assumi possit. Quid? quod anseris junioris cerebrum in acido nitri diluto positum trans septum pellucidum ita sibi divisum fuisse, ut hemisphaeria cerebri contextu celluloso tantum juncta viderentur, ill. *Reil*, in litteris mecum communicavit. Partes vero cerebri si omnes duplices sunt, alterius lateris laesiones non omnem encephali vim tollere oportere patet, et hemiplegia, aliique casus, quorum infra mentio fiet, facile explicantur.

Enormes interdum hydrocephalos, quibus cerebrum mirum in modum extenditur, saepe in senectutem usque ferri, nec intellectum abolere, mirum et fere inexplicabile videretur, nisi aquas sub aetate teneriori, ubi omnia facillime cedunt, et paullatim colligi, observaremus. Simulac enim aquae copia, licet perquam exigua, stagnat, aut ipsa, aut status eam excitans conscientiam tollit et vitae mi-

minatur, ut hydrocephali acuti satis superque testantur. Cel. *Gall* de hydrocephalo, cujus naturam medicos adhucdum fugisse credit, explicando hypothesin, fautores licet invenerit, anatomico neutiquam probabilis erit. Cerebrum enim cum panno comparare non timet, ut in statu naturali complicatum, sub hydrocephalo autem evolutum et expansum fingat. Cum panno vero neutiquam comparandum, nec enim cultello, nec maceratione, nec menstruis chemicis in usum vocatis, cerebrum unquam in tunicam redigi potest; sub hydrocephalo vero incremento aquarum continuo ventriculi tantum extenduntur, ut cerebrum iis cedat, partes autem in ventriculis positae molliores fiant et tandem tabescant. Qui medullae hemisphaeriorum, corporis callosi, fornicis, corporum striatorum, thalamorum opticorum etc. rationem habet, encephalum cum panno nunquam comparabit.

Si autem encephali nulla pars solo pro sensorio communi haberi potest, an totum omnibus sensorii functionibus praesit, utrum organorum tantum peculiarium complexum sistat, nova oritur quaestio, quam accuratius sub examen vocabimus. Cerebrum organis plurimis inter se liberis componi, et quamlibet animae vim, facultatem animi vel propensionem sibi propriam cerebri partem vindicare, *Gall* argumentis demonstrare annititur insequentibus.

1. Animae vires aliquot agere, quiescere aliae possunt, his fatigatis illae adhuc alacres, ut, qui studio aliquo exhaustus sit, alteri adhuc incumbere possit. Si totum cerebrum, dum studio cuidam nosmet damus, agitaretur, in novo labore recreationem non inveniremus.

2.

2. Animae vires, facultates animi et propensiones eodem in inviduo non aequales sunt; si a totius autem encephali perfectione penderent, omnes simul, vel perfectae vel imperfectae forent. Saepe qui verba, numeros non aeque facile memoriae mandabit; saepe qui musices arte plurimum pollet, colorum rationem semper ignorat; qui fortis est, simul vel mitis vel crudelis esse potest et sic porro.

3. Variis in animalibus haec illave facultas adest, quae in plurimis desideratur; sic nonnulla animalia socialia, alia solitaria; alia sono musico delectantur, quem alia v. c. canis, abhorrent; homo nonnullis viribus et facultatibus instructus est, quibus omnia reliqua carent animantia. Hisce in casibus ad peculiaria concludere licet organa, quae his illisve sunt aut negantur.

4. Facultates nostrae non simul excitantur vigent et pereunt, sed dum aliae augentur, minuuntur aliae. Hac ratione facultas observandi cito eminet, nec non memoria in juvenilibus annis summa floret; sensus propagationis pubertatis tempore primum excitatur et quae ejusmodi sunt plura.

5. Morbis vel laesionibus encephali non omnes semper animae vires pereunt, sed singulae saepius laborant, reliquis intactis. Haec vel illa maniae species accedit, ut homo, ceteroquin sanae mentis, unica in re deliret; quaedam tantummodo in memoriam revocari non possunt etc.

Argumentis hisce robur esse, quis negaret, attamen vero quae demonstranda sunt, non demonstrant. Si cerebrum plurima complecti organa, et quamvis animae vim, facultatem animi et propensionem partem cerebri propriam sibi vindicari cl. *Gall* ex his deducit, ego sensorium commune, omni inhaerens cerebro, ad varios effectus edendos, vario modo agitatum et agens, ex iisdem deducerem, ut argumentis datis sequentia opponam.

1. Sensorium eodem semper modo agitatum facil fatigatur, si diversis autem afficitur stimulis, vario agit modo longiusque iis satisfacere valet; certi tamen in his quoque fines sunt, ut tempus, quo studiis licet maxime variatis incumbas, a tuo non pendent arbitrio, variatio enim studii laborem gratiorem reddit, non quidem tollit. Si alia aliave semper afficerentur organa, multo diutius, quin fere continuo labori ferendo pares essemus. Nec de cerebro solo hoc valet, motus cujuslibet partis idem longius continuatus taedium tandem et dolorem ciet, variatus parti lenimen affert, licet adhuc motae; sic retina totum per diem afficitur, sed dum alia aliis excipiuntur objectis, ad noctem usque munere commode fungitur; idem vero objectum si diutius prae oculis habemus, tandem fere coecutimus et sic porro.

2. Sensorium nostrum plerumque diversa quoad officia non aequali gaudere vi et robore, facillime explicatur. Primum cerebri constructio ea esse potest ut certos ad motus edendos, vel ferendos labores magis minusve hebes sit; secundo vero ad perfectionem quandam sibi con-

ci-

ciliandam exercitatione opus est; haec vero si continua fuit, ut organon certos ad motus paratissimum sit, aliis non ideo adaptatum est, quos neglexit. Qui memoriam in carminibus addiscendis elaboravit, quae sermone soluto conscripta sunt, difficilius retinebit; fac vero eundem his incumbère, de successu certe sibi gratulabitur. Ipse memoria satis felici usus, me numeros eidem non mandare posse, nescio qua de caussa, diu credidi; dum vero urbem diutius habitarem, cujus aedificia numeris insigniuntur, hos plurimos consuetudine quotidiana adjutus, facillime retinui, et qua partem adhuc retineo. Qui motu aliquo musculari pollet, ut in artificibus quotidie videri est, ad reliquos saepe frustra se accingit.

3. Variis in animalibus facultates conspici varias, nostrae non obest sententiae, nec ad propria idcirco recurrendum est organa, his vel illis exclusive data. Cerebrum aliter aliterque constructum aliis par erit officiis; saepissime autem ad constructionem nativam non respiciendum est, sed ad educationem variosque stimulos externos. Canis ad feras pertinet, diuturna vero cum homine consuetudine ferocitatem amisit; si equum, felem et reliqua animalia domestica cum iisdem indomitis comparas, eadem sequuntur. Hyaenam, tigridem etc. hucusque mansuefacta non esse, minime obstat, plures enim per generationes si animalia haecce nobis subdita forent, nutui nostro aeque obtemperarent. Propria vero si iis essent organa fero nunquam accederet, et numquam domitari possent; si status autem sensorii aut organi certus tantum mutandus est, res explicatione non indiget. Bestiae voluntati nostrae subjectae

plurima hominis fere modo agere coguntur, et elephantum, simiarum, ursorum, canum, aviumque plurimarum exemplo constat, quousque animalia eiudiri, vel potius in arte imitandi progrediantur. Naturam in iis creandis ad haec respexisse, et propria hunc in finem iis dedisse organa, nemo contenderit, sed nosmet animalia vires sibi commissas ad alia applicare cogimus, quam quibus in statu naturali applicuerint. Ipsa quoque circumstantiis plurimis semper determinantur, licet libertate fruantur, nec omnia pari modo vivunt, sic castor v. c. in America septentrionali aedificia struit notissima, in Europa solitarius aut saltem vagus occurrit, nec in Suecia septentrionali, ubi rarus tamen non est, ejusmodi dantur castrorum domicialia; si proprio sensu (ex Gallii mente) ad aedificia struenda ferretur, ab iis vix abstineret.

4. Facultates nostras non simul excitari, vigere et perire, aliud est argumentum, facillime reprobandum. Dum sensorium infantis agere incipit, rerum innumerabilium varietate delectamur, omnia indagamus, rogamus etc. Pari ratione incolae Americae insularumque oceani pacifici cum Europaeos resque europaeas primum viderint, omnia, licet adulti, infantum modo contrectarunt, exoptarunt. — Res plurimas postquam vidimus et memoriae mandavimus, easdem comparamus, dijudicamus et sensim ad altiora ducimur. Propria hic evolui organa non necessarium est, sed idem sensorium magis magisque perficitur. Memoria omnium prima maxime excolitur, sed nisi materiam nobis suppeditaremus, quidnam quaeso perficeremus? Sensorium cum deinceps alio modo exerceatur, aut aliis rebus eidem obla-

oblatis, pristinum statum relinquit. Sed hoc a nobis plurimum pendet; qui nonnisi verba memoriae mandat et judicium vix exercet, semper mediocris erit ingenii; inde qui pueri optimam de se moverunt spem, adulti saepe totam fallunt, cum puerilibus semper inhaeserint. — Quae primum aut valide in nosmet egerunt, nunquam delentur, hinc juventutis cara vestigia semper servantur; quae plurimis occupati, aut hebetes accipimus, senum more, facile obliviscimur, plura ut taceam.

5. Morbis vel laesionibus capitis, sensorii non omnem vim, sed saepius tantum maxime specialem turbari vel tolli, argumentum crucis videtur; ex turbata vero cerebri hac vel illa actione aeque facile explicari potest, quam ex unò alterove organo laeso. Innumeris enim modis, ut munere suo fungatur, sensorium agat necesse est, jam vero una alterave harum actionum aeque facile, quam omnes, interrumpi vel tolli potest. Saepe, dum sanitate fruimur optima, accidit, quod haec illave pro lubitu in memoriam revocare nequeamus, quae mox sponte redeunt, statu nimirum, qui nobis impedimento erat, cessante. Sub morbo idem fit et eodem subacta memoria redit, aut inveterato perit. Ita post typhum saepe imbecillitas quaedam remanet, viribus redeuntibus tollenda. Nisi sub capitis vulnere, ictu etc. totum sensorium afficeretur, multa nobis explicatu difficillima forent. Quomodo v. c. si alterum tantum capitis latus, aut pars ejusdem saepe minima afficitur, quomodo quaeso omnis memoria, omne judicium, omnis conscientia mox tolli potest? Si organa omnia ex auctoris mente tam independentia quam duplicia sunt, hujus

hujus illiusve partis laesio nunquam ita funesta esse deberet.

Argumentis a cl. *Gall* allatis res itaque minime conficitur sed dubia relinquitur, et ex ipsa sensorii natura hanc ad litem dirimendam nihil colligi potest. Animam immaterialem habeas nec ne, utroque in casu de sensorii natura non fies certior. Anima, qualem ponunt, an cerebrum unicum constituens sensorium, utrum plurimas ejus partes gubernet, idem est; materiae enim cum non-materia connubium semper inextricabile et mente humana subtilius. Si materiam solam agnoscas, num cuivis encephali parti suam commissam esse provinciam, utrum totum omnibus sensorii functionibus praeesse statuas, iisdem tamen implicitus eris dubiis. Haec omnia itaque philosophis enucleanda relinquo et argumenta tantum curo physica.

Anatomice vero si cerebrum examinatur, res non magis ex voto cl. *Gall* cedit. Encephalum unicam quidem massam non constituit, ast partium in eodem obviarnm nec numerum nec differentiam magni aestimaveris. Cerebrum a cerebello tam magnitudine quam forma, tam gyrorum quam medullae dispositione discrepat; ceteroquin vero in utroque substantia tam medullaris et corticalis, quam etiam intermedia Gennari occurrit, et medullaris interna occupat; utrumque tandem pars ratione, pedunculorum scilicet ope cum ponte Varolii conjungitur, licet in pedunculis cerebri locus nigrescens Soemmerringio dictus itidem diversitatem quandam prodat. Reliquae encephali partes oculo singulares visae, magnitudine, figura externa et loco po-

potissimum differunt, structuram quoad internam, si corpora striata et glandulam pinealem forte excipias, discriminis notam offerunt vix ullam. Quae dixi, tam de ipso ponte Varolii, quam de eminentia quadragemina, de thalamis opticis, de corporibus mammillaribus, olivaribus etc. valent.

Omnia ista si rite conferuntur, de organis peculiaribus in cerebro assumendis vix oriri potest suspicio, sed quaelibet dum intime nexa et pari ratione structa vides partes potius ejusdem organi esse secundarias, hypothesin praeferres. Hoc etiam ex analogia reliqui corporis satis probatur. Omne, quod organi peculiaris nomine dignum habetur, et rei praeest sibi unice commissae, et structura gaudet propria nusquam alibi obvia, ita cor, pulmones, hepar, lien, renes etc. organa peculiaria vocanda sunt. Quodlibet autem eorum partibus plerumque plurimis secundariis insigne; cor v. c. maxime compositum, si atria sinubus et auriculis formata, ventriculos septo distinctos, tam parietum quam luminum ratione discrepantes, valvulas carneas polymorphas filis adnexas tendineis etc. conferre placet. Systema biliferum, uropoëticum si consideramus, quantamne habemus partium secundariarum differentiam et copiam? Eidem porro fini inservientia saepe pro loco vel aliis rebus nos fugientibus satis discrepant, glandulae e. g. lymphaticae non solum figura et magnitudine, sed etiam structura interna, vel vasculosa, vel cellulari, vel ex his mixta differunt.

Ex anatomia itaque encephali organa peculiaria in eodem demonstrari nequeunt, si assumendi tamen animus est,

est, novae physiologo oriuntur difficultates, nec quidem minoris momenti. Animae virium, facultatum animi et propensionum magnus adest numerus, ut cuilibet organon peculiare conferre placet, vix huic par fueris negotio, nisi cerebrum pro lubitu dividatur. Ita etiam fere factum est, nec enim encephali partes forma diversae et quodammodo solutae illustri viro solae pro organis habentur, sed haecce quavis in cerebri parte promiscue ponit, ut limites organorum sint nulli, utque in externa cerebri superficie, ejus ex sententia, organa et plurima et diversissima conveniant, ea inquam in superficie, quae maxime ignobilis, dum (utpote corticalis) nonnisi fere vasis constat. Quid? quod in uno eodemque loco, ut postea videbimus, duo habet organa diversa! Sed alia adhuc monenda. Per sensus tantum nervosque cerebrum affici nemo negabit: jam si totum cerebrum, vel partem ejusdem nervorum compotem affici statuis, hoc capio; organa vero plurima si in parte cerebri anteriori, nervis destituta, ponuntur, quomodo haec singula primario, et ceteris cerebri partibus intactis, afficiantur, capi non potest. Quomodo in eminentia quadrigemina, vel alia ejusmodi parte, nervis orbata, mutatio exoriri potest, nisi reliquum mutatum est cerebrum? Facultatem personarum notas nobis imprimendi cum Gallio in parte cerebri anteriori ponas: jam quomodo istae notae colligantur, inquirendum est; aliorum hominum in vultu, habitu corporis, aliorum in loquela et sic porro notas invenimus specificas, et tam surdi aliquoties visos, quam auditos coeci dein facile distinguunt; unico itaque sensu notas illas non colligimus, et plures nervi ad eandem symbolam ferunt, quonam autem modo nervus opti-

ticus, acusticus vel alius quisque (olfactorio excepto) cerebri partem anteriorem, in qua organon fingis, afficiat? Si organa tandem, ut ex structura cerebri fluit, duplicia assumenda, alterum ab altero ejusdem naturae organo saepe maxime dissitum est, ut utrumque, licet nervi peculiares non adeant, eodem temporis momento et reliquo cerebro intacto affici, statuendum sit; at quaenam quaeso vis haec organa uniat, unica ut oriatur idea. Si totum autem sensorium affici et agere statuas, ideae unitas facile explicatur. Conscientia tandem sui nunquam eo modo datur, cuilibet organo ex Gallii mente suasit conscientia.

Argumentis hisce novae theoriae basin, qua cerebrum nonnisi plurimis organis aggregatum ponitur, vacillantem, ne dicam fictitiam esse, satis probatur, ut altera hypotheseos pars, quae organorum cranii ope detegendorum rationem exhibet, sub examen vocanda sit. Clarissimus vir, dum cuilibet animae vi, facultati animi nec non propensioni peculiare offert organon, hoc ipsum, dum vis aut facultas eidem insita augetur vel imminuitur, majus vel minus fieri; cranium vero a cerebro formari, inde etiam hujus totius et omnium partium exhibere magnitudinem, ut a cranio ad animae virium, facultatum etc, statum conclusio valeat, nobiscum communicavit. Singula adeamus.

Organon dum excolitur, majus fieri, hypothesis est, eaque valde dubia. Musculi omnino valde exercitati validiores fiunt, iisque ossa adaptantur, ut gladiatorum aliorumque exempla probant; saepissime autem musculorum vis in summum gradum intensive augetur, ut hystericarum spasmi,

chorea sancti Viti, trismus etc. docent, quin imo maxillam inferiorem equi hydrophobi sub morsu ruptam vidi, quo exemplo nihil evidentius esse potest. Viscera solito majora utplurimum debilia et aliqua labe ampliora facta, ut lien, hepar, renes etc. testantur; pariter cum systemate et sanguifero et absorbente res se habet; de nervis exercitio vel alia re majoribus factis nulla comperimus, et de cerebro idem valet. Apud cel. Gall cranium viri ingeniosi et carminibus clari, Blumaueri puta, valde magnum, aliud vero feminae amentis fere duplo minus vidi; horum cerebra craniis respondisse, nullus dubito; at certissime utraque magnitudo conformationi naturali debebatur, et tam in furiosis quam in hominibus sanae ut vulgo dicunt mentis, ceteroquin autem ingenii dotibus plus minus eminentibus, crania promiscue et majora et minora observamus, in solis dementibus plerumque parva. De singulis cerebri partibus in quibusdam hominibus magis excultis nulla scimus, nisi meritissimi Gredingii, qui in aliquot furiosis summam cerebri partem valde elevatam vidit, observationem huc traheres, quae ceteroquin Gallii sententiae non favet.

Cave ne in sola extensione organi perfectionem ponas, cum intensive maxime augeri possit, ut musculorum exempla allata probant. Cerebrum minus majori saepe palmam aufert, nec mirum; plurima sensorii vitia sunt fugacia, emendari et tolli possunt, ut cerebri vitium organicum et in specie diminutionem assumere tali in casu neutiquam conveniat; energia enim organi cujuslibet variis modis turbari et laedi, ut ab altera parte augeri potest. Nullam saltem cerebri partem, quae in certa vesaniae specie

cie major, aut sub animae quadam vi magis exculta, major occurrat, notam esse, repeto; in genere vero de cerebro in furiosis plerumque nulla praeter naturam offerente, ill. Pinel, testem fide dignissimum habeo. Ill. Gall cerebra hominum paucissima secuit; et in certis hominibus certam partis cujusdam cerebri se observasse magnitudinem, nunquam ab eodem accepi. Quaenam etiam magnitudinis norma haberetur?

Omnia quae de partibus cerebri humani majoribus vel minoribus a cl. viro afferuntur, ex craniorum inspectione collecta sunt. Cranium enim a cerebro formari credit, ut pars cerebri magis exculta cranium eo loco extrorsum elevet, vel introrsum trahat; minus exculta, utque externe tali in casu vel protuberantia vel impressio animadvertatur. Cranium, quando formari incipit, cerebro utut parti prius existenti et nobiliori in genere adaptari, idemque a cerebri gravioribus vitiis postmodum quoque mutari posse, nullus negabit. Plurima autem cranii a cerebro nequoquam pendent, ut sequentia probant.

1. Cel. vir, quo loco cranium externe elevatur, cerebri partem eminentem in cau a esse, effatur, ut saepissime in cranii superficie externa protuberantia, ubi interna aequalis, nec (uti ex Gallii mente esse deberet) concava est; eminentiae porro maxime irregulares, saepe hic illis dispersae, vel in altero tantum latere occurrunt, cerebrum autem a solita formatione non aberrat.

2. Ab altera parte saepius in superficie externa impressiones v. c. in fronte, ubi superficies cranii interna itidem aequalis est, ut illae a cerebro ortum non ducant.

3. Saepenumero in superficie cranii interna exostoses et loca varia aspera, quae ex ossis vitio primario ortae sunt, cum cerebrum iis laesum sit; si a cerebro recedente derivandae forent, hoc iis laesum esse non posset.

Unde etiam cerebro tanta vis, ut os formatum extrorsum protruderet, vel introrsum traheret? Cranium enim a solo cerebro extensum putare, absonum foret.

Quemadmodum vero ill. vir ab organis cerebri cito evolutis indeque amplioribus factis cranium extrorsum prominere, vel introrsum ductum esse, si illa neglecta vel male disposita fuerint; ita etiam vergentibus annis mutari cranium, sed alio modo, statuit. In senibus nimirum ejus ex sententia organa hebetia decrescunt, et interna cranii tabula introrsum ducitur, externa immutata manet; inde crania senum hebetum et hominum aetate adulta mente caplorum crassa sed spongiosa, cum crania hominum a primis annis dementium aeque crassa, sed dura et solida sint.

Et in his plurima sunt reprobanda. In senibus ex cerebri mutatione mutari etiam cranium non probari potest, sed sub universa corporis labe, siccitate nimirum et rigiditate, fluidorum decremento, nutritione languida etc. ossa etiam statum pristinum relinquunt, minime vero cranii tantum ossa, sed omnia et singula, quae in sceleto habentur

tur. Quaedam autem praesertim organa v. c. memoriae species omnes volventibus annis debilitari et perdi asseruntur, et cum eadem ex Gallii mente anteriorem cerebri partem occupant, ex eorem volumine imminuto cranii tabulam internam introrsum duci et sinus frontales inde potissimum oriri, saltem ampliari, auctor est. Haec autem numquam concedi possunt: sinus enim frontales longe prius formari incipiunt, et sub vigore memoriae jam adsunt; nec mera est cranii expansio sive tabularum secessus; cavitates habes tunica muscoa indutas, quarum apertura meatum narium medium adit, partes ideoque proprii usus, summae magnitudinis in animalibus plurimis odoratu pollentibus, ut totam cranii superficiem superiorem sibi vindicent v. c. in sue, elephanto etc. Aeque parum certe sinus frontales a cerebro recedente, quam ab aëre sub respiratione cavitatem narium intrante, quem alii arguunt, natalia ducunt. De cranio introrsum ducto hypothesis Galliana falsae huic de sinubus frontalibus ideae potissimum tamen inniti videtur, nam in reliquo cranio nil simile accidit. Crassities cranii et universalis et partialis plurimum variat, nec observationes adsunt, quibus suffulti theoriam hac de re condere queamus. Gredingius v. c. in iis, qui longo ex tempore mente capti fuere, saepe crania tenuissima offendit, licet saepius crassiora dantur; aliquot in casibus cranium altero in latere crassius, justo vero tenuius in altero, omnia autem in cerebro duplicia aut symmetrica cum sint, haec alterius lateris crassities theoriae non favet, et exempla plurima huc trahi possent, sic v. c. Foderé, vir clarissimus, in libro de struma et cretinismo, se in homine sanae mentis alterum cerebri hemisphaeriorum in pus mutatum

tatum

tatum invenisse refert. — In miseris, qui a prima juventute amentes fuere, cranium solito et crassius et durius observari, notissimum est, id vero a cerebro pendere maxime dubitarem, ut potius ab alio vitio deducerem. Ratio saltem latet, cur cerebro amentium minori cranium multo durius et crassius competat, cum crania saepe minima simul tenuia sint, ab altera vero parte, crania humana omnium maxima, quae innotuerunt, simul etiam ingenti praedita crassitie; talia v. c. in museo anatomico Lugduni Batavorum vidi et ill. Sandifort descripsit et iconibus illustravit; omnium autem maxime memorabile est cranium horrendum, quod cl. Jadelot nuper descripsit, et quod stupefactus in collectione ill A. L. de Jussieu Parisiis miratus sum. Huic argumento eo magis insisterem, cum cranii ossa sola non sint, in quibus crassities duritiesque praeternaturalis, interdum fere lapidea, observetur; saepe v. c. ex venerea labe ossia plurima et lata et longa maxime ponderosa facta; ab altera vero parte tenuitas quoque praeternaturalis omnibus in sceleti ossibus observata est. Quolibet saltem in casu mutationis ossium historia tradenda, an v. c. mollities et spongiositas vel aliud ossium vitium praeiverit, et hoc tandem durities insecuta sit; an cranium solum, utrum reliqua etiam ossa affecta fuerint. Quoties saltem plurima corporis ossa et simul etiam cranium solito crassiora et duriora observantur, cranii vitium a cerebro non derivandum, quum certissime cum reliquorum ossium malo ejusdem est originis. Pari modo craniorum giganteorum caussa in cerebro hydrocephalico non semper quaerenda, cum alia quoque dentur ossa aeque gigantea, v. c. extremitatum, nec osteomalacia a cerebro pendeat.

Ex

Ex dictis, quam ambigua sit cranioscopia, facile colligi potest, ipsam quoque cranii ab externa parte inspectionem non sufficere, cl. vir monet. Cranium enim a cerebri parte magis exculta sub juventute tantum, ejus ex sententia, elevatur, si cerebri pars serius evolvitur, cranium eo loco tenuius fit, quaemadmodum imminutionem cerebri sub senectute obtinentem cranium crassius reddere statuit. Sed haec quoque restrictio non sufficit, variis enim in hominibus qui a teneris annis aliqua facultate v. c memoria verbali, musica rel. ornatissimi erant, cranii partes, quibus horum organorum sedem subjacere statuit cl. vir, minime elevatas vidi, cum in aliis certas partes prominere viderim, quibus organa tamen ibidem supposita v. c. memoria localis, minime exculta fuere. — Ceterum autem tota ill. viri hypothesis ex cranioscopia originem duxit; cum enim in hominibus aliqua re excellentibus certam cranii partem elevatam viderit, hanc in rem ulterius inquisivit, et postquam in aliis eadem facultate destitutis, locum eundem depressum observavit, rem confectam credidit, et ex loco praesumto vel elevato vel depresso ad facultatis vel praestantiam vel absentiam concludit. Clarissimum virum hac methodo usum saepenumero hanc vel illam facultatem recte indicaturum esse, nullus dubito, at in physiognomia simile quid saepius accidit, quae tamen fallacissima. Erroris excusandi ubivis etiam occasio erit, simulac theoriam hujus generis excusandi animus est. Fac enim hominis cujusdam frons valde promineat, quod semper pro bona nota acceptum est, hominem autem istum fatuum vel boeoticum esse; nihil refert, cerebrum enim hoc in casu magis ad anteriora ductum esse, in parte postica vero deficere, cranioscopiae ad-

addicti respondebunt. Cranii partem in homine organi supposititi indigentissimo essé elevatissimam vides; organon a natura optime dispositum sed ab homine neglectum fuisse, referent. Hominem aliqua facultate maxime pollere, in cranio autem notam ejus non inveniri, ponas: organon ex primaria constructione perquam exiguum, sed stimulis postmodum elaboratum esse, exhibebunt et sic porro.

Ad organa sub cranio latentia eruenda, aliam quoque viam proponit secundariam, artem mimicam sibi vocatam. Quavis enim animae vi, vel facultate animi etc. agente, caput ad eam partem, cui organon agens suppositum est, inclinari statuit, et manus involuntarie huic loco admoveri. Si itaque homo meditans hanc vel illam cranii partem digitis contrectat etc. ad certum organon ibi activum concluditur. Consuetudinem, imitationem aliaque plurima motus illos et capitis inclinationem facile explicare patet, et hypothesi huic non ulterius inhaeream, quae ne discipulis quidem et assertis cl. viri arridet.

Gravioris omnino momenti, quam ad hypothesin confirmandum cl. vir in usum vocat, anatome comparata. Hac in genere nihil praestantius, nihil ad physiologiam promovendam aptius dici potest, in ejusdam autem applicatione, praesertim ubi de cerebro agitur, summa opus est praecautione. Crania bestiarum quamplurimarum extrinsecus spectata formam cerebri contenti non indicant, cum tabulas cranii saepe mirum in modum discedant, sic in mammalibus saepe sinuum frontalium extensio summa, ut supra dictum est; in avibus plurimis ossa eadem aërem reci-

recipiunt et valdes spongiosa sunt. Situs porro partium cerebri diversis in animalium classibus et generibus valde diversus (qua de re Cuvier plurima bene collegit), ut maxima opus sit attentione, ne cranii forma fallaris, et hujus alicui loco cerebri partem supponas, quae alibi quaerenda est. In omnibus hisce difficultates plurimae, at fere disparent, si cum iis comparantur, quas facultates animalium extricandae secum ferunt. Paucissimarum bestiarum consuetudo nobis data est, reliquarum hac illasve nota tantum habemus, nullam autem in genere sufficienter dijudicare valemus, et simulac de brutorum sensibus sermo fit, labyrinthum intramus, nec desunt, qui plurimis gustum, odoratum aliis negant, qui alios praeter nostros statuunt sensus et sic porro. Homo vix alium praeter semet ipsum novit, ceteros homines nonnisi secum comparando, indeque saepius pessime, examinatos intelligit; ut bestiam autem cognoscat eadem comparatione utitur, quocum jure alii dijudicent. Si bestiam crudelem, superbam, nobilem etc. vocamus, omnes hae expressiones maxime vagae sunt, et ethicen quasi in brutis supponunt. Rectissime itaque Gall cauti simus monet, ipse autem comparationi nimis indulget, et in rupicapra v. c. editissimis gavisa rupibus eandem statuit propensionem, qua homo ad altiora fertur!

Si anatome comparata ad hypothesin Gallianam dijudicandam in usum vocatur, eadem nos docet: 1) cranium a cerebro non formari, sed in ejusdem formatione alias quoque res spectari, v. c. insertionem musculorum validorum nec non ligamentorum, sinuum frontalium amplitudinem ad organon olfactus facientem, receptionem aëris in avibus

plurimis et quae sunt alia; 2) encephali partium et numerum et dispositionem in diversis animalium classibus et ordinibus diversum quidem esse, hanc autem diversitatem ne unicum quidem hypotheseos momentum illustrare vel confirmare, et structurae diversae rationem nos fugere; ut ad cranium iterum recurram, tentorium cerebelli feris, Simiae Panisco, equo, et (quod auctores praeterviderunt) delphino, osseum datum est, plus minus perfectum, ut cl. Bretschneider (in dissertatiuncula hac de parte) idem vel verum vel spurium nuncupaverit, hujus autem tentorii usus nos fugit, explicationesque datae minime conveniunt; 3) status cranii et encephali occurrere morbosos, qui cum auctoris theoria non quadrant; in gallinis tophaceis v. c. cranii media pars maxime elevatur, ut hydrocephalum fere mentiatur, cerebrum hoc in casu situm alienum assumere cogitur, nec tamen animalia insana mente observantur, cranium autem si respicis (quod ill. Pallas in spocilegiis zoologicis bona icone illustratum dit) animal eo instructum vivere vel tantillum rationis labere posse, dubitares.

Dicta ad vias, quibus vir cl. ad organa detegenda usus est, illustrandas sufficient, alias et quidem minoris momenti hypotheses v. c. organon quoddam si notum est, affinia in ejus vicinitate quaerenda; organa quo nobiliora eo altius posita esse, rel. mitto, et singula organa quae cl. Gall a se detecta credit, ut ab eodem accepi, non ut in aliis occurrunt libris *), breviter exponam.

Tripli-

*) Ill. *Gall* theoriam scriptis nondum evulgavit, et opus magnum molitur, cujus aliquot tabulas nitidissimas apud eundem vidi, icones vero plurimas cum

Triplicia in cerebro statuit organa, sive ut recentiori tempore dicere praefert, triplices sensus; tres ergo in encephalo sunt provinciae, quae totidem functionibus praesint: 1) *vitae*, quae provincia inferiorem et posteriorem encephali partem sibi vindicat; 2) *sensuum*, vulgo sic dictorum, haec mediam et inferiorem occupat partem 3) *animae denique virium facultatum animi et propensionum*, quae cerebri hemisphaeria

---

addendi animus sit, ut anatome cerebri comparata quantum liceat perfecta reddatur, diutius forsan liber egregius expectandus erit. Aliorum vero scripta hypothesin illustrantia sunt sequentia:

1. Darstellung der neuen, auf Untersuchungen der Verrichtungen des Gehirns gegründeten Theorie der Physiognomik des Herrn D. Gall in Wien. Weimar 1801. 8. Auctor cl. Froriep, Professor Jenensis, dicitur; hypothesin tantum refert, non dijudicat, et varia in hoc libro tradita postmodum a cl. Gall mutata sunt).

2. Critische Darstellung der Gallschen anatomisch-physiologischen Untersuchungen des Gehirn- und Schädelbaues, von W-r, Zürich 1802. 8. (Auctor Gallii discipulus amantissimus praeceptoris hypothesin optime refert et suam reddit).

3. Entwickelung der Gallschen Theorie über das Gehirn vorzüglich betrachtet als ein Inbegriff der Organe unserer intellectuellen und moralischen Eigenschaften von J. C. F. Leune. Leipzig 1803. 8. (compilatio nullius momenti, plurima male referens).

4. Lettre de Charles Villiers à George Cuvier sur une nouvelle théorie du cerveau par le Docteur Gall; ce viscère étant consideré comme l'organe immediate des facultés morales à Metz 1802; cum versione: Dr. Gall's Darstellung des Gehirns als Organs der Seelenfähigkeiten und Gemüthseigenschaften, nebst der Kunst, das Innere des Menschen aus dem Aeussern seines Schädels zu erkennen Ein Schreiben Villers an Cuvier, von einem Schüler Galls. Wien und Leipzig 1803. (Non vidi, sed minoris momenti dicitur).

ria obtinet. Affectus an propriis gaudeant organis in medio relinquit, et pari modo de constantia etc. dubius est, an tantum organum statum diversum pro caussa agnoscant. Quodlibet denique organon, seu quemlibet sensum vario modo excultum esse posse monet, nec male. Organon in primo statu sive gradu *dispositionem* tantum offert; in secundo *memoria* rei, cui sensus praeest, accedit; in tertio eadem de re *judicium* habetur; in quarto denique *vis inveniendi* organi perfectionem indicat. Non datur ergo ex cl. viri sententia memoria universalis, neque universale judicium, neque vis omnibus in rebus ad nova inventa ducens, et ne quidem dispositio universalis. Clarissimum virum cuilibet sensui peculiarem simul tribuere conscientiam, jam supra monui.

I. *Provincia prima, functiones vitales exercens.* Organa ejusdem sunt sequentia:

1. *Sensus vitae* (Lebenssinn), cujus sedem in medulla oblongata prope pontem Varolii ponit, inde hujus partis laesiones subito lethales, et incisuram processus basilaris in seminis et animalibus vitae magis tenacibus majorem explicat;

Nullus huc usque contra cl. viri hypothesin exsurgere ausus est. Icones scriptis 1. et 3. annexae non sufficiunt, et organorum loca in craniis depictis vel numeris vel asteriscis tantum indicant, ut latitudo quam cl. vir cuivis tribuit organo, lateat.

Nomina quae sensibus imposui latina, plurima mihimet non arridentet vere barbara sunt. Non voces vero solummodo harum rerum, sed res ipsas Latio ignotas fuisse qui perpendit, me facile excusabit, et ambiguitas ne oriatur, voces germanicas a cl. auctore usitatas adjeci.

plicat; sed hanc incisuram cum vitae longitudine rationem quandam habere nondum probatum est, et si abscissa medulla spinali, vita subito tollitur ad vitae in hac parte sedem male concluditur; vita enim plurimis modis subito aufertur, et in animalibus adest hac parte carentibus, vita in nulla parte sedem figit, sed ex omnium corporis systematum nexu et actione reciproca oritur; in quibusdam animalibus alterius systematis jactura machinae ruinam absolutam secum fert, in aliis hoc alterove systemate laeso vel destructo, cetera vitam conservare valent. Nec omnes hujus partis laesiones lethales sunt, in ovibus vertiginosis saepe medullam oblongatam Taenia hydatigena auctorum (Polycephalo Zederi, Cysticerco sociali mihi) maximam qua partem destructam vidi; in museo zootomico Parisiensi cranium humanum est, quocum et atlas et epistrophaeus anchylosi conjuncti sunt, ita vero ut epistrophaeus simul luxatus et canalis medullae spinalis hac parte maxime angustatus sit, superficies enim anterior corporis epistrophaei septem lineas a superficie antica arcus anterioris atlantis recedit, hoc sub statu vitam tamen satis diu protractam fuisse anchylosis plenaria docet.

2. *Sensus vitae conservandae* (Lebenserhaltungssinn); cl. vir hoc de sensu adhuc dubius est, sed prope priorem situm esse suspicatur, simul autem cel. olim Hunczowsky, qui in undecim suicidis corpus callosum mutatum invenerit, observationem magni aestimat; corpus callosum a medulla oblongata certe valde dissitum est; sed organon vitae conservandae dicatum esse vix assumi potest, vitae enim desiderium a corporis statu nec non stimulis externis pendet;

det; saepius uno eodemque tempore plurimi eadem ex ratione suicidae habentur, non raro uti videtur ex morbi epidemici natura, sic v. c. sub aestate anni 1802 Viennae ultra septuaginta suicidia peracta dicuntur.

3. *Sensus nutritionis* (Nahrungssinn), si quis unquam a cl. viro arbitrarie et quidem in eminentia quadrigemina positus. In homine omnivoro tubera satis aequalia, in mammalibus carnivoris posteriora, anteriora in herbivoris majora esse arguit, ut in illis desiderium cibi animalis, vegetabilis autem in his assumat; omnibus quatuor tamen esse tubercula inde perperam explicat, quod animalia phytophaga quando nascuntur, lacte, utpote cibo animali vescantur, carnivora autem cibo vegetabili quoque assuescere possint. Sed hypotheseos facilis habetur refutatio, inter feras enim lutra exceptionem offert, hujus enim tubercula anteriora majora sunt, ut ill. Soemmerring observavit, et idem in talpa accidit, quae tamen insectis et vermibus pascitur. Solis tandem mammalibus eminentia conceditur quadrigemina, ut plura offerre non opus sit, organon enim tale si existeret, in nullo animalium desiderari oporteret, jam vero paucissimis tantum haecce pars data est.

4. *Sensus propagationis* (Begattungstrieb) recte a cl. viro ad functiones vitales refertur, cum sub propagationis actu vita quasi multiplicetur. Sedem ejusdem in cerebello ponit, et cl. virum cerebro plurima, cerebello autem unicum tantum committere officium miraberis. Hominibus ad venerem frigidis et animalibus castratis (mulis quoque) cerebellum minus esse nec occiput aeque prominere quam

in

in potentibus; animalibus sub oestro venereo cerebellum turgere; venere vel onania exhaustis minus fieri, dolores in regione occipitis oriri, cl. vir affert. Veneris exercitio organon ei concessum minus fieri contra aliam auctoris hypothesin pugnare videtur, secundum quam organon quo magis exercetur; volumine augetur; masturbatione exhaustis dolores non solummodo in nucha sed saepe in toto medullae spinalis decursu; animalibus sub oestro venereo turgor plurimarum partium, et in encephalo cerebellum tantum turgere non demonstratum est; castratis et frigidis occiput non aeque prominere, qnam in capacibus, facile concedo, sed in iis plurima fere muliebria sunt, nec idcirco ad cerebellum concludi potest. Malacarnium in cerebello rationis sedem figisse, praetereundo moneam, et in sanae mentis hominibus arboris medullaris (vitae sic dictae) processus foliaceos numero multo plures invenit, quam in stultis.

II. *Sensus stricte sic dicti.*

Organa eorum in ea cerebri parte ponit, quam sensuum nervi adeunt, ut thalami ergo nervorum opticorum visui praesint. Hisce cl. vir solummodo inniti potest, ceteris enim sensibus focum talem non inveniet, cum eorum nervi in massam cerebri medullarem abeant, nec thalamis instructi sint. Gustui et tactui quin imo nervi peculiares non dicantur, sed illius organon ramum habet nervi trigemini, tactus autem organa plurimos legunt ramos ex plexu brachiali. Et coenaesthesis Reilio dicta quonam modo ex hypothesi derivabitur? Organorum itaque peculiarium sensibus inservientium theoria avit, cum ad solos nervos opticos applicare possit.

Prope

Prope organon auditus alios adhuc praesumit sensus, huic affines, cum in cranio heic loci elevationes non raro conspiciantur, sibi nondum explicabiles.

III. *Provincia. Animae vires, facultates animi et propensiones.*

1. *Sensus realis* (memoria realis, Sachsinn, Sachgedächtnis) in inferiori frontis parte supra glabellam. — 2. *Sensus localis* (Ortsinn, Ortgedächtnis, utrinque prope glabellum supra arcum orbitalem. — 3. *Sensus verbalis* (Wortsinn, Namengedächtnis) in processus orbitalis ossis frontis parte posteriori. — 4. *Sensus linguarum* (Sprachsinn, Sprachgedächtnis) in eadem parte ante praecedentem. — 5. *Sensus colorum* (Farbensinn) ad latus externum sensus localis. — 6. *Sensus musices* (Tonsinn) supra processum orbitarium ossis frontis externum. — 7. *Sensus numeralis* (Zahlensinn) infra priorem, homini proprius. — 8. *Sensus personarum* (Personensinn), facultas personarum notas revocandi, prope processum orbitarium ossis frontis internum, ad latus internum sensus verbalis. — 9. *Sensus artisticus* (Kunstsinn) pone processum orbitarium ossis frontis externum, supra alam magnam ossis sphaenobasilaris. — Omnium itaque horum sensuum sedem in anteriori cerebri parte ponit, cujus structura uniformis tot organa adesse dissuadet, ut etiam nervorum absentia, de qua supra effatus sum, non convenit. Cel. vir partes ossium dictas in hominibus hac alterave memoriae specie pollentibus extantes observavit, indeque theoriam condidit, ita in hominibus memoria verbali excellentibus oculos prominentes, depressos

magis

magis in iis vidit, qui sensu linguarum gaudent. Sed omnia haec fallacissima. Homines vidi memoria verbali destitutos, oculis autem maxime prominentibus, quales etiam in myopibus fere semper occurrunt; vidi quorum memoria summa oculos prominentes non reddidit, pariter partem cui sensus localis subesse dicitur in hominibus eo nequaquam instructis eminentissimam vidi, et cranium mihi est, in quo haecce pars tam extrorsum, quam introrsum prominet, quod theoriae ex diametro ut ajunt, oppositum est. Sinus frontales partibus dictis subesse non est tandem quod obliviscamur; ut ex talium locorum protuberantia ad cerebrum ipsum concludi, nequeat, quod tam de sensu locali, quam numerali, musico, personali, colorum etc. valet.

10. *Sensus amoris parentum* (Sinn der Kinderliebe) in posteriori cerebri lobo, ut externe in cranio superiorem ossis occipitis partem sibi vindicet, supra sensum propagationis; in sexu femineo in genere hanc partem magis, quam apud mares, eoque magis exstare, quo majori mater in sobolem vehatur amore, cl. *Gall* asserit. — 11. *Sensus amicitiae* (Sinn der freundschaftlichen Anhänglichkeit) utrinque ad latus externum praecedentis positus; amicitia vero difficillime dijudicatur, ut plurimis eandem simulantibus cujusnam cranium inspiciendum sit, nos fugiat. — 12. *Sensus fortitudinis* (Muthssinn, Organ des Muths) in osse bregmatis supra processum mastoideum. — 13. *Propensio ad trucidandum* (Mordsinn), pariter in osse bregmatis, supra praecedentem, magis tamen antrorsum, tali propensioni in paucissimis certe mortalibus inveniendae or-

ganon peculiare perperam tribuitur, plurima inter hominum millia nullus unquam ad caedes fertur et qui fratrum sanguine contaminantur, circumstantiis vel affectibus invo-voluntarii vel furiosi plerumque cedunt, cl. *Gall* itaque in homicidae cujusdam atrocis cranio hanc partem exstantem vidisse, nil refert, et ex iis quae supra de anatomes comparatae applicatione attuli, omnia repelluntur, quae vir cl. de cranio bestiarum sanguinolentarum v. c. mustelarum et tricheci rosmari, hac parte latiori offert. — 14. *Sensus circumspectionis* (Organ der Vorsichtigkeit) in ossis bregmatis utriusque parte media; in hominibus sua non curantibus cranium hoc loco angustius esse, valde latum in capreolis etc. — 15. *Sensus astutiae* (Schlauheitssinn) in inferiori ossis bregmatis angulo; elevatio autem si trans suturam coronalem ad processum orbitarium ossis frontis externum continuatur, oritur. 16. *Sensus furacitatis* (Diebssinn), de quo idem valet, qud de sensu n. 13. attuli, aliquot enim homines fere fures natos videri nil refert. — 17. *Sensus munificentiae* (Freigebigkeitssinn), Gallii ex sententia adest, si latera externa frontis (inter sensus 1. et 6.) aequalia sunt, impressio hujus loci vero avaritiam indicat. — 18. *Sagacitas in comparando* (vergleichender Scharfsinn), in osse frontis supra sensum realem; concionatoribus, demagogis etc. proprius. — 19. *Sagacitas philosophica* (speculirender Scharfsinn) utrinque ad latus externum praecedentis. — 20. In observatoribus clarissimis, praesertim medicis, frontem in omni parte, quam sensus 18 et 19 sibi vindicant, aequaliter elevari, *Gall* asserit, et Boerhavii, Stollii, P. Frankii, Jacquini suoque exemplo probat. — 21. *Ingenium* (stricte sic dictum, Witz) in lo-

loco, quem tubera frontalia tenent, ponitur, ut jam ante cl. virum, Lavater aliique posuerunt, sensus n. 18. huic nimis affinis est. — 22. *Sensus benevolentiae* (Gutmüthigkeitsorgan) in media ossis frontis parte supra sensum n. 18.; in feris et avibus rapacibus heic loci impressionem esse longitudinalem cl. vir arguit, sed hac de re jam antea locutus sum. — 23. Si elevatio in sensu praecedente obvia ad latera quoque frontis extenditur, benevolentiam non amplius indicat sed mimorum et histrionum vim repraesentandi magnam; quomodo haec cum benevolentia coincidere possit, me fugit! — 24. *Sensus theosophiae*, in summa ossis frontis parte usque ad suturam coronalem; in hominibus rebus mysticis, religionem spectantibus, occupatis, jam ex Lavateri mente occurrit. — 25. *Sensus constantiae* (Stetigkeitssinn) in summo vertice sive media cranii parte. — 26. *Sensus celsitudinis* (sensus quo ad altiora ducimur, Höhensinn) pone praecedentem, ad hujus vero latera 27. *Sensus superbiae* (Hochmuthssinn) positus.

Haec sunt organa (sive sensus) quae semet ex cranii inspectione extricasse *Gall* profitetur. Singulis argumenta non opposui, cum eadem fere omnibus opponenda sint, et quae generalia praemisi sufficere videantur. Dubia mea si solvuntur nec alia adsunt, hypothesin cl. viri lubenter meam reddam; veritatem enim eruere mortalibus tantum curae sit, qualis sit veritas, non interest.

DESCRIPTIO
NOVI PLANTARUM GENERIS.

Auctore

Mich. Fried. Adams.

Classis Hexandria.

Ordo Monogynia.

*****. *Flores nudi.*

Exhibita in Conventu die 23 Januarii 1805.

Tab. B. *Character essentialis.* Corolla infera, sexfida, subcampanulata. Stamina nectario cylindrico inserta.

Character genericus. Corolla monopetala, campanulata, sexfida; laciniis erectis, ovatis, obtusis.

Nectarium monophyllum, cylindricum, dimidio corollae brevius: limbo sexdentato, dentibus rectiusculis.

Stamina: Filamenta sex minima, collo nectarii ad fissuras dentium affixa. Antherae oblongae, nectario breviores aut subaequales.

Pi-

Pistillum Germen rotundatum, trisulcatum, superum. Stylus filiformis, longitudine staminum, persistens. Stigma simplex.

Capsula oblonga, multangula.

Semina orbiculata, fusca.

Descriptio specifica.

Bulbus ovatus, subsolidus, magnitudine allii, cortice cinerea dense adhaerente: fibris simplicibus, filiformibus, parallelis, albis.

Scapus spithamaeus aut dodrantalis, erectus, filiformis, teres, ad inflorescentiam angulatus, laevissimus, pauciflorus.

Folium radicale unicum, lanceolato-lineare, planum; scapi duo opposita, illius basin vaginantia, erecta, linearia, magis canaliculata: integerrima, acuta, glabra, nitida, nervosa, spithamaea.

Racemus terminalis, bi-tri v. sexflorus, raro ultra.

Pedunculi uniflori, erecti, paululum attenuati, teretes, glabri, e glandula scapi exeuntes; inferiores corolla sesquilongiores, terminales dimidio breviores.

Brac-

Bracteam subulatam sub racemum in nonnullis speciminibus observavi.

Corolla cyanea, laciniis caesiis, nervo intermedio obscuriore.

Locus. Habitat in jugis subalpinis Montis Ararat, circa Metallifodinas argenteas, ad fluvios Debeda et Achstapha, nec non in Cacumine Monticuli Garvasin, ubi prima specimina legi.

Observat. Odor debilis. Sapor fatuus. Floret Mense Martio et Aprili. Semina matura Augusto et Septembri profert. Crescit in solo cretaceo-argilloso. Bulbos glutine abundante, insipido praeditos esse, inveni. In systemate Plantarum locum inter Scillam et Tulbagiam tenet, quarum prima, quoad habitum, maxime cum nostra convenit, unde etiam, novitate convictus, in honorem Illustrissimi Comitis Apollonnis de Mussin Puschkin.

Puschkiniam scilloidem dixi.

MATHEMATICA

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

FACILLIMA METHODUS
PLURIMOS NUMEROS PRIMOS PRAEMAGNOS INVENIENDI

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibita die 16. Mart. 1778.

1. Sufficiet hanc methodum unico exemplo, numerorum in hac formula $232aa+1$ contentorum, explicasse, ubi omnes valores ipsius a investigabo, quibus haec formula numeros compositos producit; his enim exclusis, omnes reliqui numeri pro a assumti numeros primos suppeditabunt.

2. At si formula $232aa+1$ praebeat numerum compositum, tum semper talis aequatio locum habebit: $232aa+1 = 232xx+yy$; praeterea quod $232 = 8.29$ est numerus idoneus *). Sic igitur erit $232(aa-xx) = yy-1$. Jam ponatur $y = 1+58z$, ac facta divisione per 232 prodibit ista aequatio: $aa-xx = \frac{1}{2}z(29z+1)$, sive, quia unitatem tam positive quam negative accipere licet, erit

$$aa-xx = \tfrac{1}{2}z(29z\pm 1).$$

3. Tribuantur nunc ipsi z ordine omnes valores 1, 2, 3, etc. et quia formula $\frac{1}{2}z(29z\pm 1)$ certe duos factores, saepiusque plures, involvet, ea semel quoque, vel pluribus modis, per productum rs repraesentari poterit, cui cum aequalis esse debeat

A 2 for-

*) Conf. Nov. Act. T. XIII. pag. 33.

formula $aa - xx = (a+x)(a-x)$, ſtatuatur $a+x = r$ et $a-x = s$, unde fit $a = \frac{r+s}{2}$, hocque modo reperientur valores pro a excludendi. Hic igitur evidens eſt, ambos factores r et s ſimul vel pares vel impares eſse debere.

4. His jam notatis ſumamus $z = 1$, eritque duplici modo, pro ambiguitate ſigni, vel $rs = 14$, vel $sr = 15$, ubi prior valor, utpote impariter par, ad noſtrum inſtitutum eſt ineptus; poſterior vero $rs = 15$ praebet duas excluſiones, vel enim erit $r = 15$ & $s = 1$, vel $r = 5$ et $s = 3$, unde valores pro a excludendi erunt 8 et 4.

5. Sit nunc $z = 2$, eritque $rs = 57$, vel $rs = 59$. Prior admittit duas reſolutiones: $r = 57$, $r = 19$
$s = 1$, $s = 3$
poſterior unicam: $r = 59$ et $s = 1$, unde oriuntur hae tres excluſiones: $a = 29$, $a = 11$, $a = 30$.

6. Sit nunc $z = 3$, eritque vel $rs = 3 \cdot 43$, vel $rs = 3 \cdot 44$, quorum valorum reſolutiones ita referentur:

$r = 129$, $r = 43$, $r = 66$, $r = 22$
$s = 1$, $s = 3$, $s = 2$, $s = 6$

unde quatuor excluſiones prodeunt

$a = 65$, $a = 23$, $a = 34$, $a = 14$

7. Sit $z = 4$, erit vel $rs = 230$, vel $rs = 234$, qui numeri, utpote impariter pares, nullas dant excluſiones.

8. Sit nunc $z = 5$, erit $rs = 5 \cdot 72$, vel $rs = 5 \cdot 73$, unde ex priore ſequentes prodeunt reſolutiones:

$r = 180$, $r = 90$, $r = 60$, $r = 36$, $r = 30$, $r = 20$
$s = 2$, $s = 4$, $s = 6$, $s = 10$, $s = 12$, $s = 18$

Hinc ergo valores ipſius a excludendi erunt 91, 47, 33, 23, 21, 19

Alter

Alter valor dat $r = 73$, $s = 5$, vel $r = 365$, $s = 1$, unde excluſiones hinc natae ſunt 39 et 183.

8. Sit $z = 6$, erit vel $rs = 3 \cdot 173$, vel $rs = 3 \cdot 175$, unde ſequentes reſolutiones:

$r = 173, 519$	$r = 525, 175, 105, 75, 35, 25$
$s = 3, 1$	$s = 1, 3, 5, 7, 15, 21.$

Excluſiones ergo naſcuntur iſtae:

88, 260, 263, 89, 55, 41, 25, 23

9. Sit nunc $x = 7$, erit vel $rs = 7 \cdot 101$, vel $rs = 7 \cdot 102$. Hic ſolus prior caſus dat has reſolutiones:

$r = 707, r = 101$
$s = 1, s = 7$, hincque excluſiones erunt 354 et 54.

Ut autem nobis terminum praeſcribamus, in poſterum omnes excluſiones majores quam 300 praetermittamus.

10. Sit nunc $z = 8$, erit vel $rs = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, vel $rs = 4 \cdot 233$. Reſolutiones hinc naſcuntur ſequentes:

$r = 462, 154, 66, 42,$	$r = 466$
$s = 2, 6, 14, 22,$	$s = 2$

unde concludimus ſequentus excluſiones:

$a = 232, 80, 40, 32, 234.$

11. Sit $z = 9$, erit vel $rs = 9 \cdot 130$, vel $rs = 9 \cdot 131$, hinc a 2da $r = 393, 131$ / $s = 3, 3$, excluditur igitur $a = 198, 70$.

12. Sit $z = 10$, erit vel $rs = 5 \cdot 17 \cdot 17$, vel $rs = 3 \cdot 5 \cdot 97$, hinc

$r = 495, 291, 97$	$r = 289, 85$
$s = 3, 5, 15$	$s = 5, 17$

, unde excluditur $a = 147, 244, 51, 148, 56$.

13. Sit

13. Sit $z = 11$, erit vel $rs = 3.11.53$, vel $rs = 32.5.11$, hinc

$r = 583, 159, 53; 440, 220, 176, 88, 80, 110, 44,$
$s = 3, 11, 33; 4, 8, 10, 20, 22, 16, 40,$ hinc
$a = 293, 85, 43, 222, 114, 93, 54, 51, 63, 42.$

14. Sit $z = 12$, erit vel $rs = 6.347$, vel $rs = 6.349$, quorum neuter dat exclusionem.

15. Sit $z = 13$, erit vel $rs = 13.4.57$, vel $rs = 27.13.7$, hinc

$r = 94, 351, 273, 189, 117, 91, 63,$
$s = 26, 7, 9, 13, 21, 27, 39,$ excluduntur ergo
$60, 179, 141, 101, 69, 59, 51.$

16. Hoc modo calculum ulterius prosequi licet, quousque visum fuerit. Exclusiones ex singulis valoribus ipsius z ortas sequenti tabula repraesentemus:

z	Exclusiones
1	4, 8
2	11, 29, 30
3	14, 23, 34, 65
4	- - - -
5	19, 21, 23, 33, 39, 47, 91, 183
6	23, 25, 41, 55, 88, 89, 260, 263
7	54
8	32, 40, 80, 232, 234
9	70, 198,
10	51, 56, 147, 148, 244,
11	42, 43, 51, 54, 63, 85, 93, 114, 222, 293,
12	51, 57, 60, 69, 101, 141, 179
14	54, 58, 66, 78, 102, 135, 162, 206, 207,

z	Excluſiones
15	64, 68, 88, 116, 236,
16	61, 77, 103, 161, 191,
17	120, 132, 168,
18	265, 266,
19	75, 147, 243, 80, 88,
21	80, 85, 83, 97, 103, 109, 128, 145, 163, 221, 235, 272,
22	84, 96, 123, 276,
23	90, 122, 178,
24	92, 140, 154
25	98, 110, 154, 194
26	108, 145,
27	103, 105, 111, 129, 125, 147, 203, 209, 241,
29	122, 134, 166, 218, 225,
30	122, 131, 133, 146, 187, 214,
31	240,
32	139, 224,
33	256,
34	130, 141, 190,
35	137, 143, 162, 169, 247, 271,
37	141, 145, 171, 287,
38	212,
39	154, 202
40	156, 174, 178, 242,
41	162, 186,
42	160, 220, 268
43	164, 195, 199, 211, 284,
45	208,
46	191, 217, 257,
47	184,
48	185, 253, 241,

z	Excluſiones
49	260
50	191, 193
51	196, 236, 292
53	202, 223, 245, 260,
54	224
56	216, 240
58	224, 236, 296
59	225, 231, 233, 272
61	239, 241, 282
62	237,
63	240,
64	246, 282
65	252
66	274
67	282
69	263, 265, 295, 263, 265
71	278
73	286
75	286, 290
78	298

17. Inter hos numeros excludendos pro littera a nonnulli bis vel ter occurrunt, quod evenit, quando numerus $232aa+1$ tres pluresve habet factores; ita videmus, numerum 265 primo a valore $z=18$, deinde bis a valore $z=69$ excludi. Hoc autem caſu revera numerus 232.265^2+1 conſtat his tribus factoribus: $59.461.599$, atque adeo praeter iſtam formam tres ſequentes recipit:

$1^\circ\ 232.256^2+1043^2$
$2^\circ\ 232.34^2+4003^2$
$3^\circ\ 232.35^2+4001^2$.

18.

18. Referamus autem in tabulam omnes hos numeros excludendos, ſecundum ordinem diſpoſitos, atque eos, qui plus quam ſemel occurrunt, aſteriſco notemus

0 4, 8
1 11, 14, 19
2 21, 23*, 25
3 30, 32, 33, 34, 39
4 40, 41, 42, 43, 47
5 51*, 54*, 55, 56, 58, 59
6 60, 61, 63, 64, 65, 66, 68, 69
7 70, 75, 77, 78
8 80*, 83, 84, 85*, 88*, 89
9 90, 91, 92, 93, 96, 97, 98
10 101, 102, 103, 105, 108, 109
11 110, 111, 114, 116
12 120, 122, 123, 125, 128, 129
13 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 139
14 140, 141, 143, 145, 146, 147, 148
15 154, 156
16 160, 161, 162, 163, 164, 166, 168, 169
17 171, 174, 178, 179
18 183, 184, 185, 186, 187
19 190, 191, 193, 194, 195, 196, 198, 199
20 202, 203, 206, 207, 208, 209
21 211, 212, 214, 216, 217, 218
22 220, 221, 222, 223, 224, 225
23 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 239
24 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247
25 252, 253, 256, 257,
26 260, 263, 265, 266, 268
27 271, 272, 274, 276, 278

28 | 282, 284, 286, 287
29 | 290, 292, 293, 295, 296, 298

His igitur numeris exclusis reliqui omnes loco *a* scripti in formula $23 + aa + 1$ producunt numeros primos. Hos igitur valores ipsius *a* sequens exhibet tabula:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18,
20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 35, 36, 37, 38,
44, 45, 46, 48, 49, 50, 52, 53, 57, 62, 67, 71,
72, 73, 74, 76, 79, 81, 82, 86, 87, 94, 95, 99, 100,
104, 106, 107, 112, 113, 115, 117, 118, 219, 121,
124, 126, 127, 136, 138, 142, 144, 149, 150, 151,
152, 153, 155, 157, 158, 159, 165, 167, 170, 172,
173, 175, 176, 177, 180, 181, 182, 188, 189, 192,
196, 197, 200, 201, 204, 205, 210, 213, 215, 219,
226, 227, 228, 229, 230, 238, 248, 249, 250, 251,
254, 255, 258, 259, 261, 262, 264, 267, 269, 270,
273, 275, 277, 279, 280, 281, 283, 285, 288, 289,
291, 294, 297, 299;

horum numerorum ultimi fere ad 20 milliones exsurgunt.

METHODUS GENERALIOR NUMEROS QUOSVIS SATIS GRANDES PERSCRUTANDI UTRUM SINT PRIMI NEC NE?

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibita die 16 Martii 1778.

§. 1.

Sit N numerus propositus, et non difficile erit eum reducere ad hujusmodi formam: $N = aa + \lambda bb$; tum vero inquiratur, utrum adhuc alio modo ad similem formam reduci queat. Si enim quoque fuerit $N = xx + \lambda yy$, ita ut sit $aa + \lambda bb = xx + \lambda yy$, tum certe numerus N non erit primus, sed ejus factores hoc modo assignari poterunt. Quoniam hinc est $aa - xx = \lambda(yy - bb)$, erit $\frac{a+x}{y+b} = \lambda . \frac{y-b}{a-x}$, quae fractiones ad minimos terminos reducti sint $\lambda . \frac{p}{q}$. Ponatur igitur $a + x = \lambda mp$ et $y - b = np$, erit $y + b = mq$ et $a - x = nq$, et hinc reperietur $a = \frac{\lambda mp + nq}{2}$ et $b = \frac{mq - np}{2}$, ex quibus valoribus, erit $N = \frac{1}{4}(\lambda mm + nn)(\lambda pp + qq)$; unde patet, formulam $\lambda pp + qq$ vel ipsam, vel ejus semissem, vel quadrantem esse factorem numeri propositi N.

§. 2. Quando autem ad talem formam $N = aa + \lambda bb$ pervenimus, tum statuamus $N = xx + \lambda yy$, ubi statim facile patebit, utrum hi numeri x et y sint pares, an vero impares, quo reperto statuatur vel $N - xx = \lambda yy$, vel $N - \lambda yy = xx$; ac priori quidem casu numerus x ita accipi

 debet

debet, ut $N - xx$ dividi queat per numerum λ. Hoc modo ad novas formulas pervenietur, quae quadrata fieri debent, in quibus inerit numerus incognitus, qui, prout fuerit acceptus vel par vel impar, ad casus perducet seorsim evolvendos. Omnes autem istae operationes facilius exemplis docebuntur.

Exemplum.

$N = 10003$ §. 3. Sit numerus examinandus $N = 10003 = 100^2 + 3.1^2$, ubi ergo $\lambda = 3$. Statuatur $N = xx + 3yy$, et quia horum numerorum x et y alter necessario est par, alter impar, videamus ante omnia uter eorum sit par, uter impar. Quoniam autem N est numerus formae $8n + 3$, si y esset par, foret $3yy$ numerus vel formae $8n + 4$, vel formae $8n + 0$; at tum foret xx formae $8n + 5$, vel $8n + 1$, quorum neutra hic locum habere potest. Sumi ergo debebit x par, eritque xx vel formae $8n + 0$, vel formae $8n + 4$; et quia tum y est impar, erit $3yy$ formae $8n + 3$, ideoque xx formae $8n + 0$ et x numerus pariter par.

§. 4. Quod si ergo statuamus $N - 3yy = xx$, istum numerum divisibilem esse oportet per 16; unde si ponamus $y = 1 + 2a$, haec aequatio dabit $10000 - 12a - 12aa = xx$, quae per 4 divisa abit in $2500 - 3a - 3aa = \frac{xx}{4}$. Unde patet numerum a denuo per 4 divisibilem esse debere: vel potius statim poni potuisset $y = 1 + 8a$, unde prodiisset aequatio $625 - 3a - 12aa = \frac{xx}{16} = \square$.

§. 5. Nunc jam duos distinguamus casus, prouti numerus a capiatur vel par vel impar. Sit igitur primo a numerus par, et quia numerus absolutus 625 jam habet formam $8n + 1$ et $12aa$ formam $8n$: necesse est ut etiam $3a$ divisio-

diviſionem per 8 admittat. Hinc ſtatim ponatur $a = 8b$ fietque $625 - 24b - 12 . 64bb = \square$. Quia igitur a numero abſoluto 625 ſubtrahi debet forma $768bb \pm 24b$, patet valorem minimum $b = 1$ jam eſse nimis magnum, hincque nullum oriri poſse quadratum. Ex valore quidem $b = 0$ prodiret quadratum, ſed ad caſum cognitum pertinens.

§. 6. Conſideremus igitur caſum, quo a eſt numerus impar, cujus forma cum ſit duplex, vel $4n+1$, vel $4n-1$, ſtatuatur primo $a = 4c + 1$, eritque $610 - 108c - 192cc = \square$, qui numerus, cum ſit impariter par, quadratum eſſe nequit.

§. 7. Tantum igitur examinandus ſupereſt caſus quo $a = 4d - 1$, qui praebet hanc aequationem: $616 + 84d - 192dd = \square$, quae per 4 diviſa in hanc abit: $154 + 21d - 48dd = \frac{xx}{64} = \square$. A numero igitur abſoluto 154 ſubtrahi debent numeri minores in forma $48dd \pm 21d$ contenti, qui ſunt 27, 69, 150, quorum ultimus ſubtractus relinquit quadratum 4, ex valore $d = +2$ deſumto. Hinc igitur erit $a = 7$, $y = 57$ et $x = 16$.

§. 8. Nacti ergo ſumus aliam inſuper reſolutionem numeri $N = 10003$, cognitae ſimilem, quae eſt $10003 = 16^2 + 3 \cdot 57^2$. Quare cum jam habeamus $\lambda = 3$, $a = 100$, $b = 1$, $x = 16$ et $y = 57$, hinc ex §. 1. erit $\frac{3p}{q} = \frac{116}{58} = 3 \cdot \frac{56}{84} = 3 \cdot \frac{2}{3}$ ideoque $p = 2$ et $q = 3$, conſequenter $3pp + qq = 21$, quod per 3 depreſsum dat 7, qui numerus revera eſt diviſor numeri propoſiti 10003, quoto exiſtente $= 1429$, numero primo.

§. 9. Hoc exemplum innititur formula $3xx + yy$, de qua ſatis rigide jam eſt demonſtratum omnes numeros, qui unico modo in ea continentur, certe eſse primos; quae proprietas

prietas abſolute neceſsaria eſt ad omnes numeros primos hac ratione explorandos Niſi enim formula $\lambda xx + yy$ hac proprietate gaudeat, de numeris, qui unico modo in ea continerentur, tuto pronunciari non poſset, eos eſse primo ; veluti caſu $a = 11$, quo in formula $11xx + yy$ numerus 15 unico tantum modo continetur, etiamſi certe non ſit primus.

§. 10. Quin etiam haec formula generaliori modo ita exhiberi poteſt: $\alpha xx + \beta yy$, de qua itidem eſt demonſtratum, omnes numeros, qui duplici modo in ea contineantur, non eſse primos, ſed compoſitos, quorum adeo factores facile aſsignari poterunt. Si enim duplici modo fuerit $N = \alpha aa + \beta bb$, tum vero etiam $N = \alpha AA + \beta BB$, hinc formetur fractio $\frac{p}{q} = \frac{a \pm A}{b \pm B}$, tum ſemper formula $\alpha pp + \beta qq$ praebebit factorem numeri N, poſtquam ſcilicet per minores diviſores α, β, 2, ſi quos admittit, fuerit depreſsa.

§. 11. Contra vero, ſi quispiam numerus N unico tantum modo in formula $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, inde non ſemper concludi poteſt, hunc numerum eſse primum, ſiquidem innumerabiles exhiberi poſsunt hujusmodi formulae, in quibus etiam numeri compoſiti ſemel tantum contineantur, cujus rei exemplum jam ſupra attulimus. Hanc ob circumſtantiam maxime neceſsarium eſt, formulas hujus poſterioris indolis a prioribus diſtinguere atque a praeſenti negotio prorſus excludere. Demonſtravi autem alio loco regulam, cujus ope formae poſterioris indolis dignoſci atque adeo e medio tolli poterunt. Regula autem iſta ita ſe habet:

§. 12. Propoſita formula $\alpha xx + \beta yy$, de qua quaeritur, utrum in ea numeri compoſiti unico tantum modo contineri queant nec ne, conſideretur haec formula $\alpha\beta + zz$, ubi ipſi

z om-

z omnes ſucceſsive tribuantur valores ad productum $\alpha\beta$ primi, ſive ii ipſius z valores excludantur, qui cum hoc producto communem habent diviſorem; tum vero ſufficit hos numeros ex formula $\alpha\beta + zz$ reſultantes tantum usque ad terminum $4\alpha\beta$ continuare. Quod ſi enim omnes hi numeri fuerint primi, formula $\alpha xx + \beta yy$ tuto in noſtro negotio uſurpari poterit; ſin autem unicus inter eos fuerit numerus compoſitus, tum haec formula penitus erit rejicienda. In hoc autem judicio probe eſt tenendum, numeros quadratos inſtar primorum eſse ſpectandos, pariter ac dupla primorum, et poteſtates binarii, quae circumſtantia ſummi in dijudicatione noſtra eſt momenti.

§. 13. Illuſtremus hanc regulam aliquibus exemplis; ac primo quidem propoſita ſit haec forma: $7xx + 2yy$, unde conſideretur haec expreſſio: $14 + zz$, ubi ipſi z ſucceſſive tribuantur valores ad 14 primi 1, 3, 5, unde reſultant numeri 15, 23, 39, quorum primus cum jam ſit compoſitus, pariter ac tertius, formulam propoſitam tanquam ineptam excludi oportet perinde atque hanc ad idem judicium deducentem: $14xx + yy$.

§. 14. Propoſita formula $30xx + yy$, in forma $30 + zz$ ipſi z tribuantur valores impares ad 30 primi, qui ſunt 1 et 7, unde oriuntur numeri 31 et 79, qui cum ambo ſint primi, haec formula in praeſenti negotio tuto adhiberi poterit, nec non ſequentes hinc oriundae: $15xx + 2yy$, $6xx + 5yy$, $10xx + 3yy$.

§. 15. Propoſita ſit formula $120xx + yy$; ubi in forma $120 + zz$ ipſi z tribui debent hi valores impares ad 120 primi: 1, 7, 11, 13, 17; numerus enim 19 praeberet numerum

merum, quadruplum producti $\alpha\beta = 120$ ſuperantem. Inde autem colliguntur numeri ſequentes: 121, 169, 241, 289, 409, qui cum ſint vel primi vel quadrati, hinc concludimus formulam propoſitam, perinde ac ſequentes inde deſumtas, ſcilicet: $40xx + 3yy$; $24xx + 5yy$; $15xx + 8yy$, tanquam idoneas ſpectari debere et in examine tuto admitti poſſe.

§. 16. Sit propoſita formula $7xx + 5yy$ et in hac expreſſione $35 + zz$ valores ipſi z tribuendi erunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, qui praebent hos numeros: 36, 39, 44, 51, 71, 99, 116, ubi cum adeo ſex ſint compoſiti, hanc formam omnino excludi oportet.

§. 17. Habeatur formula $15xx + 7yy$ et in expreſſione $105 + zz$ ipſi z tribuendi erunt hi valores ad 16 primi: 1, 2, 4, 8, 11, 13, 16, 17, qui praebent hos numeros, omnes pro primis habendos: 106, 109, 121, 169, 226, 274, 361, 394 unde ſequentes formulae in claſſem idoneorum ſunt ponendae: $105xx + yy$; $35xx + 3yy$; $21xx + 5yy$; $15xx + 7yy$.

§. 18. Addamus his exemplis examen formulae $57xx + yy$: et numeri loco z ſucceſſive ſcribendi, ſcilicet 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13 hos praebent valores formae $57 + zz$ notatu dignos: 58, 61, 73, 82, 106, 121, 157, 178, 226, qui omnes ſunt vel primi, vel quadrati vel dupli primorum, ita ut formula propoſita certe ſit inter idoneos referenda.

§. 19. Haec ſufficient ad inſignem ſimulque faciliimum uſum noſtrae regulae illuſtrandum, cujus ope caſus idoneos formulae $\alpha xx + \beta yy$ ab ineptis diſcernere valemus; qua igitur regula ſtabilita, illos caſus optimo cum ſucceſſu adhibere poterimus ad numeros quosvis in talibus formulis contentos, utrum

ſint

ſint primi nec ne, perſcrutandos. Propoſito ſcilicet numero quocunque N facile erit illum pluribus modis ad talem formam $\alpha xx + \beta yy$ reducere, quo facto talis eligatur caſus, qui per regulam ſupra datam non excludatur, ac diſpiciatur, utrum ille numerus N unico tantum modo, an vero pluribus, in hac forma contineatur: Priore enim casu certe erit primus, poſteriori vero compoſitus, cujus factores ope methodi ſupra traditae facile aſsignare licebit.

Exemplum I.

§. 20. Proponatur numerus $N = 100003$, qui manifeſto in forma $10xx + 3yy$ continetur, exiſtente $x = 100$ et $y = 1$. Videamus ergo, an iſte numerus adhuc alio modo in eadem forma contineatur. Hunc in finem ponamus $100003 - 3yy = 10xx$, atque ut diviſio per 10 ſuccedat, ponatur $y = 1 + 10z$, hincque orietur $10000 - 6z - 30zz = xx$, ſive facta adhuc diviſione per 4 erit $2500 - \frac{3}{2}z - \frac{15}{2}zz = \frac{xx}{4}$. Hinc igitur, prouti z fuerit vel par vel impar, formemus duos caſus principales. Pro primo ſcilicet ſit $z = 2a$, orietur aequatio $A = 2500 - 3a - 30aa = \frac{xx}{4}$. Pro altero caſu ſit $z = 2b - 1$, orietur iſta: $B = 2494 + 27b - 30bb = \frac{xx}{4}$. N=100003

Evolutio formulae

$$A = 2500 - 3a - 30aa = \tfrac{1}{4}xx.$$

§. 21. Hic ſtatim patet, ſumto $a = 0$ prodire quadratum, praebens caſum cognitum $x = 100$ et $y = 1$. Jam iterum duos caſus diſtinxiſſe conveniet, quibus a eſt numerus vel par vel impar: ac priori quidem evidens eſt pro a ſumi debere numerum pariter parem. Sit ergo pri-

mo $a = 4c$, et facta diviſione per 4 oritur haec aequatio: $C = 625 - 3c - 120cc = \frac{1}{16}xx$. Hic igitur, quia c tam poſitive quam negative ſumi poterit, numeri a 625 ſucceſſive ſubtrahendi ordine erunt ſequentes in forma $120cc \pm 3c$ contenti: 117, 123, 474, 486, unde autem nullum plane quadratum reſultat.

§. 22. Tribuamus nunc ipſi a valorem imparem, qui ſit $a = 4d \pm 1$, et facile eſt videre, ſolum ſignum inferius valere poſſe. Fiat igitur $a = 4d - 1$, et aequatio per 4 diviſa evadet $D = 2473 + 228d - 480dd$. Hinc igitur a numero abſoluto 2473 ſucceſſive ſubtrahi debent numeri ſequentes in forma $480dd \pm 228d$ contenti, ſcil. 252, 708, 1464, 2376, unde iterum nullum quadratum reſultat.

Evolutio Formulae.

$$B = 2494 + 27b - 30bb = \frac{xx}{4}.$$

§. 23. Hic ſtatim patet, ſi pro b capiatur numerus par, eum impariter parem eſſe debere. Sit igitur $b = 4e + 2$, et facta diviſione per 4 aequatio hinc reſultans erit $B = 607 - 93e - 120ee = \frac{xx}{16}$. A numero ergo abſoluto 607 ſubtrahi debent ſequentes in forma $120ee \pm 93e$ contenti, qui ſunt 27, 213, 294; ubi autem nullum quadratum occurrit.

§. 24. Denique pro b numeros impares tentemus. Facile autem patet, poni debere $b = 4f - 1$, ita tamen, ut numerus f ſit impar, qui ergo ponatur $= 2g+1$, eritque $b = 8g+3$, unde oritur haec aequatio: $2305 - 1224g - 1920gg = \frac{xx}{4}$. Hic ergo unicus numerus 696 ab abſoluto 2305 ſubtrahendus occurrit, unde autem numerus non-quadratus relinquitur

Quo-

Quoniam igitur ex toto hoc calculo nullus numerus quadratus prodiit, jam certo pronunciare poſsumus numerum propoſitum 100003 eſse primum.

Brevior Methodus in hunc numerum inquirendi.

§. 25. Quoniam ante habuimus $10003 = 10.100^2 + 3.1^2$, etiam ſtatuere poterimus $100003 = 40.50^2 + 3.1^2$, ita ut ſit $\alpha = 40$ et $\beta = 3$, qui caſus, uti ſupra vidimus, admittitur. Hanc ob rem ſtatuamus $100003 - 3yy = 40xx$, fiatque $y = 1 + 20z$, et facta diviſione per 40 ſtatim pervenimus ad hanc aequationem: $2500 - 3z - 30zz = xx$; ubi duo caſus conſiderandi occurrunt, prouti z fuerit numerus par vel numerus impar, quorum utrumque ſeorſim evolvamus.

§. 26. Pro priore caſu evidens eſt pro z ſumi debere numerum pariter parem. Sit ergo $z = 4a$, et facta diviſione per 4 oritur haec aequatio: $625 - 3a - 120aa = \frac{xx}{4}$. Hic ergo a numero abſoluto 625 ſequentes ex forma $120aa + 3a$ deſumti ſunt ſubtrahendi: 117, 123, 474, 486. Hinc autem nullum occurrit quadratum, praeter caſum $a = 0$, qui per ſe jam eſt notus.

§. 27. Supereſt ut pro z numerum imparem ſcribamus, qui ſit $z = 2b - 1$, fietque aequatio $2473 + 114b - 120bb = xx$, qui numerus cum ſit impar, ideoque debeat eſse formae $8n + 1$, evidens eſt ſumi debere $b = 4c$, unde prodit haec aequatio: $2473 + 456c - 1920.cc = xx = \square$. Sumto igitur $c = \pm 1$ numeri a 2473 ſubtrahendi erunt 1464 et 2376, quorum neuter quadratum relinquit. Hinc eadem, quam ſupra, concluſio: numerum 100003 certo eſse primum. Ex

posteriori autem hujus numeri examine intelligere licet, in genere eo majus lucrum exspectari posse, quo majores numeros pro α et β accipere liceat.

Exemplum 2.

N=1000003 §. 28. Propositus sit numerus $N = 1000003$, qui manifesto continetur in formula: $3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1000^2$. Quoniam autem, uti modo monuimus, expedit pro α et β numeros majores adhibere, idem quoque numerus facile repertus est contineri in forma $3 \cdot 577^2 - 19 \cdot 8^2$, ita ut sit $\alpha = 3$ et $\beta = 19$, ideoque $\alpha\beta = 57$, qui numerus, uti commode evenit, inter idoneos jam supra est relatus. Hanc ob rem statuamus $1000003 - 3xx = 19yy$, atque ipsi x talis valor tribui debet, ut formula haec divisionem per numerum 19 admittat. Quare cum in casu cognito sit $x = 577 = 30 \cdot 19 + 7$, ponamus hic $x = 7 + 19z$, et facta divisione per 19 orietur haec aequatio: $52624 - 42z - 57zz = yy$. Ubi statim duo casus considerandi occurrunt, prouti z fuerit numerus par vel impar. Pro priori casu statuatur $z = 2a$, et aequatio per 4 divisa ita se habebit: $13156 - 21a - 57aa = \frac{yy}{4}$, quam vocemus $= A$. Pro altero casu ponatur $z = 4b - 1$, quoniam facile est videre, valorem $z = 4b + 1$ penitus excludi. Hinc ergo orietur haec altera aequatio principalis:

$$B = 52609 + 288b - 912bb = yy.$$

Has igitur duas aequationes A et B, principales, seorsim ulterius evolvamus.

Evolutio Formulae

$$A = 13156 - 21a - 57aa = \frac{yy}{4}.$$

§. 29. Hic subdivisio in duos alios casus institui debet, quorum quisque iterum seorsim evolvatur. Sit primo a numerus

merus par, et quidem $a = 4c$, qui valor, in aequatione A substitutus, producit sequentem aequationem, postquam scilicet divisio per 4 fuerit facta: $C = 3289 - 21c - 228cc = \frac{yy}{16}$. Hic ergo a numero absoluto 3289 successive subtrahi debent numeri in forma $228cc \pm 21c$ contenti, qui sunt:

si c numerus negativus: 207, 870, 1989
si c numerus positivus: 249, 954, 2115

unde autem nullum quadratum resultat.

§. 30. Sumamus ergo pro a numerum imparem, qui manifesto debet esse formae $4d - 1$. Facta igitur substitutione $a = 4d - 1$, simulque divisione per 4, orietur haec aequatio: $D = 3280 + 93d - 228dd$. Hinc numeri formae $228dd \pm 93d$ a numero absoluto 3280 successive subtrahendi erunt

si d numerus negativus: 135, 726, 1773, 3276
si d numerus positivus: 321, 1098, 2331

quorum quartus prioris seriei dat quadratum 4 ex casu $d = -4$, unde fit $y = 8$, qui casus jam est cognitus, praeter quem hic nullum amplius quadratum occurrit.

Evolutio Formulae

$$B = 52609 + 288b - 912bb = yy.$$

§. 31. Hic ergo a numero absoluto 52609 successive subtrahantur numeri in formula $912bb \pm 288b$ contenti, quos hic in gemina columna, una cum eorum differentiis, tam pro valoribus ipsius b positivis quam negativis repraesentemus:

b	$912bb - 288b$	Diff.	b	$912bb + 288b$	Diff.
0	0	624	0	0	1200
1	624	2448	1	1200	3024
2	3072	4272	2	4224	4848
3	7344		3	9072	

§. 32. Jam vero loco ſucceſsivae ſubtractionis numerorum in forma $912bb \pm 288b$ contentorum differentiae eorum augmento conſtanti 1824 creſcentes continuo ſubtrahi poterunt, quos in ſubſidium calculi hic ſubjungamus

624	1200
2448	3024
4272	4848
6096	6672
7920	8496
9744	10320
11568	12144.

§. 33. Nunc igitur hi numeri a numero abſoluto 52609 continuo ſubtrahantur, ac diſpiciatur, an usquam numerus quadratus relinquatur, quem calculum commode in duabus columnis hoc modo repraeſentare licet:

52609	52609
624	1200
51985	51409
2448	3024
49537	48385
4272	4848
45265	43537
6096	6672
39169	36865
7920	8496
31249	28369
9744	10320
21505	18049
11568	12144
9937	5905

ubi

ubi nullum plane quadratum occurrit, pariter ac in praecedentibus, casu scilicet cognito excepto. Hinc igitur jure concludimus, numerum propositum, 1000003 unico modo in forma $3xx + 19yy$ contineri, ideoque certe esse primum.

§. 34. Ex hoc exemplo clare apparet, quantum interfit in formula $\alpha xx + \beta yy$ pro α et β majores numeros investigare, dummodo eorum productum $\alpha\beta$ in classe numerorum idoneorum contineatur, pro quibus inveniendis regula supra fuit exposita. Quamobrem, ut quovis casu statim appareat, utrum tale productum $\alpha\beta$ sit numerus idoneus, nec ne, tabulam istorum numerorum, quousque eam continuare licuit, hic subjungamus.

Tabula numerorum idoneorum $\alpha\beta$, hac proprietate praeditorum, ut omnes numeri unico modo in formula $\alpha xx + \beta yy$ contenti certe sint primi

1	16	48	120	312
2	18	57	130	330
3	21	58	133	345
4	22	60	165	357
5	24	70	168	385
6	25	72	177	408
7	28	78	190	462
8	30	85	210	520
9	33	88	232	760
10	37	93	240	840
12	40	102	253	1320
13	42	105	273	1365
15	45	112	280	1848

§. 35.

§. 35. Quoties igitur numerum quempiam propoſitum ad talem formam $\alpha xx + \beta yy$ reducere licuerit, ut productum $\alpha\beta$ inter numeros iſtius tabulae contineatur, tum haec formula uſurpari poterit ad examen, jam ſaepius allatum, inſtituendum. Conveniet autem accuratius explicare regulam, cujus ope operationes neceſsariae expedite inſtitui queant, id quod in ſequente Problemate oſtendamus.

Problema.

Propoſito numero quantumvis magno N, explorare, utrum is ſit primus nec ne?

Solutio.

§. 36. Quo major fuerit iſte numerus N, eo pluribus modis eum in ejusmodi duas partes reſolvere licebit, quarum utraque habeat factorem quadratum, quae ſint αaa et βbb, ex quibus igitur talem eligi conveniet, ut numerorum α et β productum in tabula modo expoſita contineatur, ubi quidem plurimum intererit majores hujusmodi numeros indagare.

§. 37. Talibus igitur numeris inventis ponamus eſse $N = \alpha aa + \beta bb$, et nunc totum negotium huc redit, ut inveſtigetur, utrum iſte numerus inſuper alio modo in eadem forma $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, nec ne. Si enim talis caſus occurrat, numerus propoſitus non erit primus, atque tum adeo ejus factores, per praecepta ſupra data, aſsignare licebit. Sin autem nullus talis caſus occurrat certo pronunciare poterimus, iſtum numerum N eſse primum.

§. 38. Ista autem investigatio sequenti modo generaliter instituatur: Ponamus esse $N = \alpha xx + \beta yy$, ita ut sit $\alpha aa + \beta bb = \alpha xx + \beta yy$, unde formemus hanc aequationem: $\alpha aa - \beta(yy - bb) = \alpha xx$, ubi praestabit pro α majorem numerum assumere, pro β vero minorem. Hic igitur statim patet, pro y ejusmodi numerum accipi debere, ut formula $yy - bb$ divisorem α involvat. Evidens enim est non solum numeros α et β primos inter se esse debere, sed etiam tam x ad β quam y ad α primum esse statuendum.

§. 39. Quoniam igitur $yy - bb$ per α divisibile esse debet, ante omnia erit dispiciendum, utrum α sit numerus primus nec ne. Priori enim casu vel $y + b$ vel $y - b$ divisorem habere debet α, unde unicus tantum casus exsurgit; sin autem α involvat factores, tum utique fieri potest, ut alter contineatur in forma $y + b$, alter vero in forma $y - b$; unde praeter illum casum adhuc unus vel plures novi casus examinari debebunt. Unicus scilicet casus occurret, si α duos tantum habeat factores; sin autem plures factores involvat, tum etiam pluribus modis in duos factores resolvi poterit, quos singulos seorsim perscrutari oportet.

§. 40. Ponamus igitur in genere esse $\alpha = \mu\nu$, et quovis casu facile patebit, quot modis numerus α in binos hujusmodi factores resolvere licet, quotcunque etiam involvat divisores; neque etiam numeri primi hinc excluduntur, quippe quibus casibus vel pro μ vel pro ν unitas erit scribenda. Hinc ergo ponamus $y + b = \mu p$ et $y - b = \nu q$, ita ut sit $yy - bb = \mu\nu pq = \alpha pq$, et facta divisione per α aequatio deinceps resolvenda erit $aa - \beta pq = xx$.

§. 41. Numeri autem p et q hoc modo commodissime reperiuntur. Eliminata enim littera y habebimus $2b = \mu p - \nu q$. Jam quaeratur fractio $\frac{m}{n}$ proxime aequalis fractioni $\frac{\mu}{\nu}$, ita ut $m\nu - n\mu = 1$; tum capiatur $p = \nu s - 2nb$ et $q = \mu s - 2mb$, ubi jam pro s numeros quoscunque integros accipere licet, sive positivos, sive negativos, et aequatio nostra resolvenda induet hanc formam:

$$aa - \beta(\nu s - 2nb)(\mu s - 2mb) = xx,$$

ubi jam pro s ejusmodi valores investigari debent, ut ista forma $aa - \beta(\nu s - 2nb)(\mu s - 2mb)$ quadratum evadat. Totum negotium igitur eo redit, ut dispiciatur, an, tribuendo litterae s successive omnes valores tam positivos quam negativos, a zyphra ad terminum usque qui numeros praeberet negativos, an dico usquam quadratum resultare possit.

§. 42. Evolvamus igitur singulos numeros, quos a quadrato aa subtrahi oportet, quos littera S designemus, ita ut fit $aa - S = xx$. Habebimus ergo

s	S
0	$4\beta mnbb$ - - - I
± 1	$\beta(\nu \pm 2nb)(\mu \pm 2mb)$ - - - II
± 2	$\beta(2\nu \pm 2nb)(2\mu \pm 2mb)$ - - - III
± 3	$\beta(3\nu \pm 2nb)(3\mu \pm 2mb)$ - - - IV
± 4	$\beta(4\nu \pm 2nb)(4\mu \pm 2mb)$ - - - V
± 5	$\beta(5\nu \pm 2nb)(5\mu \pm 2mb)$ - - - VI

Quoniam isti valores sat simplici lege progrediuntur, perpendamus eorum differentias, ac reperiemus:

$$\text{II} - \text{I} = \beta(\mu\nu \pm 2b(m\nu + n\mu)$$
$$\text{III} - \text{II} = \beta(3\mu\nu \pm 2b(m\nu + n\mu)$$
$$\text{IV} - \text{III} = \beta(5\mu\nu \pm 2b(m\nu + n\mu)$$
$$\text{V} - \text{IV} = \beta(7\mu\nu \pm 2b(m\nu + n\mu)$$

quae-

quae manifeſto in progreſsione arithmetica progrediuntur, cujus differentia eſt $2\beta\mu\nu$.

§. 43. His differentiis inventis nihil aliud ſupereſt, niſi ut eae ordine continuo a quadrato aa, primo termino minuendo ſubtrahantur. Ab aa ſcilicet primo ſubtrahatur prima differentia; tum vero a reſiduo ſecunda, a reſiduo hinc nato tertia, porro quarta etc. quoad ad numeros negativos perveniatur; hisque operationibus ita continuatis diiudicatur, utrum usquam numerus quadratus remanſerit; quod ſi non contigerit, numerus propoſitus certe pro primo erit habendus; sin autem usquam quadratum prodierit, ejus radix dabit valorem ipſius x, et notato valore i, ſi s conveniente etiam reperiri poterit alter numerus y, ſiquidem erit $y = b + \mu\nu s - 2\nu mb$. Quia vero ſupra ſumſimus $m\nu - n\mu = 1$, erit nunc $y = \mu\nu s - b(m\nu + n\mu)$.

§. 44. Quod ſi numerus propoſitus N fuerit vehementer magnus, numerum harum operationum non parum diminuere licebit, ſi numeri S, quos a quadrato aa continuo ſubtrahi oportet, in duas claſses diſtinguantur, prout pro s valores ſive pares ſive impares accipiantur. Priore enim caſu, cum ſit vel $s = 2n$, vel $s = 4n + 2$, plerumque eveniet, ut alter caſus penitus excludatur, ob eam proprietatem, quod inde pro S numeri prodirent impariter pares. Eodem modo ſi pro s ſumatur numerus impar, erit vel $s = 4n + 1$, vel $s = 4n - 1$, quarum formarum altera penitus excluditur, quia omnia quadrata imparia ſunt formae $8n + 1$, ita ut hoc modo numerus operationum ad ſemiſsem redigatur.

§. 45. Quoniam initio poſuimus $\alpha = \mu\nu$, hosque numeros μ et ν ut primos inter ſe ſpectavimus, id quod potiſſi-

mum de factoribus imparibus eſt tenendum, notetur ſi α ſit numerus par et poteſtatem quamcunque ipſius binarii involvat, tum utrumque factorem $y+b=\mu p$ et $y-b=\nu q$ parem eſſe debere. Unde ſi ipſi μ valor par tribuatur, nihil impedit quo minus et ν par ſtatuatur, id quod facile in exemplis oblatis obſervare licet. Ita cum numerus $520=8.5.13$ in tabula ſuperiore numerorum idoneorum contineatur, ſecundum praecepta hic tradita in genere numeros $N=40aa+13bb$ evolvamus.

Evolutio generalis
numerorum contentorum in forma
$N=40aa+13bb$.

§. 46. Hic igitur erit $\alpha=40$ et $\beta=13$, atque hinc numeros x et y ex ſequenti forma elicere licebit:

$$40aa-13(yy-bb)=40xx$$

ubi ſtatim duos caſus diſtingui conveniet, quibus eſt vel $\mu=10$ et $\nu=4$, vel $\mu=20$ et $\nu=2$, quia ſcilicet ambo factores debent eſse pares.

Casus I.
quo $\mu=10$ et $\nu=4$.

§. 47. Hic igitur erit $y+b=10p$ et $y-b=4q$, hincque $b=5p-2q$. Fractioni ergo $\frac{5}{2}$ proxima erit $\frac{2}{1}$, unde ſtatuamus $p=2s+b$ et $q=5s+2b$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio reſolvenda erit

$$aa-13(2s+b)(5s+2b)=xx.$$

Poſito igitur brevitatis gratia numerum a quadrato aa subtrahendum, ſcil. $13(2s+b)(5s+2b)=S$, ſi loco s ſucceſſi-

ceſsive ſcribamus numeros $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc. valores ipſius S cum ſuis differentiis, quorum uſum jam ſaepius explicavimus, ita ſe habebunt:

5	S	Diff.
0	$26bb$	$130 \pm 117bb$
± 1	$13(2 \pm b)\ (5 \pm 2b)$	$390 \pm 117bb$
± 2	$13(4 \pm b)\ (10 \pm 2b)$	$650 \pm 117bb$
± 3	$13(6 \pm b)\ (15 \pm 2b)$	$1910 \pm 117bb$
± 4	$13(8 \pm b)\ (20 \pm 2b)$	
etc.	etc.	etc.

quae differentiae continuo creſcunt augmento conſtanti 260, unde facile, quousque libuerit, continuabuntur; ubi autem probe notetur, ſubtractionem differentiarum fieri debere a numero $aa - 26bb$.

Casus II.

quo $\mu = 20$ et $\nu = 2$.

§. 48. Hic igitur erit $y + b = 20p$ et $y - b = 2q$ unde, cum hinc fiat $b = 10p - q$, ſumto $p = s$ fiet $q = 10s - b$, et aequatio reſolvenda erit: $aa - 13pq = xx$ ſive $aa - 13s(10s - b) = xx$. Poſito igitur brev. gr. $13s(10s - b) = S$, valores ipſius S, prouti s fuerit vel 0, vel 1, vel 2, vel 3, erunt ſequentes:

s	S	Diff.
0	0	$130 \pm 13b$
± 1	$13(10 \pm b)$	$390 \pm 13b$
± 2	$26(20 \pm b)$	$650 \pm 13b$
± 3	$39(30 \pm b)$	$910 \pm 13b$
± 4	$52(40 \pm b)$	
etc.	etc.	etc.

ubi

ubi differentiae iterum manifesto augmento constanti 260 crescunt, quas igitur loco S continuo ab ipso quadrato aa subtrahi oportet.

Alia Evolutio
numerorum formae $40aa + 13bb$.

§. 49. Cum habeatur aequatio: $40aa - 13(yy - bb) = 40xx$, tollamus primo tantum factorem parem 8, et quia b denotat numerum imparem, evidens est, dummodo pro y etiam sumatur numerus impar, formulam $yy - bb$ fore divisibilem per 8. Ponatur igitur in genere $y = 2z + b$, et facta divisione per 8 habebimus hanc aequationem:
$5aa - \frac{13}{2}(zz \pm bz) = 5xx$; ubi evidens est, membrum medium semper esse integrum. Nunc igitur loco z talem numerum assumi oportet, ut vel z, vel $z + b$ factorem habeat 5: perinde autem est uter horum factorum per 5 divisibilis reddatur, propterea quod inter se sunt permutabiles, mutato scilicet signo ipsius b. Ponatur igitur $z = 5s$ et facta divisione per 5 aequatio, cui satisfieri oportet, erit:
$aa - \frac{13}{2}(5ss \pm bs) = xx$.

§. 50. Hic igitur a quadrato aa subtrahi debent numeri in forma $\frac{13}{2}(5ss \pm bs)$ contenti, quae si vocetur $= S$, valores ipsius S erunt, uti in sequenti tabula cum suis differentiis exhibentur.

s	S	Diff.
0	0	$\frac{13}{2}(5 \pm b)$
± 1	$\frac{13}{2}(5 \pm b)$	$\frac{13}{2}(15 \pm b)$
± 2	$\frac{13}{2}(20 \pm 2b)$	$\frac{13}{2}(45 \pm b)$
± 3	$\frac{13}{2}(45 \pm 3b)$	$\frac{13}{2}(35 \pm b)$
± 4	$\frac{13}{2}(80 \pm 4b)$	
etc.	etc.	etc.

ubi

ubi differentiae, quas a quadrato aa continuo ſubtrahi oportet, augmento conſtanti $\frac{13}{2} . 10 = 65$ creſcunt.

§. 51. Quin etiam unica ſubſtitutione totus numerus 40 ſtatim tolli poteſt, ponendo $y = 10s \pm b$; tum enim ob $yy - bb = 100ss \pm 20bs$, dividendo per 40 ſtatim pervenitur ad hanc aequationem: $aa - \frac{13}{2}(5ss \pm bs) = xx$, uti modo invenimus. Hoc igitur artificio ſemper uti licebit, quoties littera a valorem habeat parem, atque adeo cum poteſtate binarii ſimul unum factorem primum tollere licebit. Veluti ſi $a = 2^{\lambda} . fg$, ita ut formula $yy - bb$ per hunc valorem diviſibilis reddi debeat, ſtatim poni poterit:

$y = 2^{\lambda-1} fz \pm b$; tum enim erit:

$yy - bb = 2^{2\lambda-2} ffzz \pm 2^{\lambda} bfz$, quae forma

$2^{2\lambda-2} ffzz \pm 2^{\lambda} bfz$ per $2^{\lambda} f$ diviſa abit in hanc:

$2^{\lambda-2} fzz \pm bz$; quod igitur cum fuerit praeſtitum, reliqui factores per praecepta generalia, alibi tradita, facile e medio tolli poterunt. En adhuc alia, eaque ſimpliciſsima evolutio formulae $N = 40aa + 13bb$.

§. 52. Cum poſito $N = 40xx + 13yy$ aequatio prima fundamentalis hoc modo repraeſentetur: $13bb - 40(xx - aa) = 13yy$, obſervaſſe juvabit, eam unica operatione reſolvi poſſe, ponendo $x = 13s \pm a$. Facta enim ſubſtitutione et diviſione per 13 pervenietur ad hanc aequationem ſimpliciſſimam: $bb - 40(13ss \pm 2 . as) = yy$. Hic igitur a quadrato bb ſucceſſive ſubtrahi debent valores formulae: $40(13ss \pm 2as)$, qui ita (poſita hac formula br. gr. $= S$) ordine cum ſuis differentiis diſponantur:

s	S	Diff.
0	0	$40(13 \pm a)$
± 1	$40(13 \pm 2a)$	$40(39 \pm 2a)$
± 2	$40(52 \pm 4a)$	$40(65 \pm 3a)$
± 3	$40(117 \pm 6a)$	$40(91 \pm 2a)$
± 4	$40(208 \pm 8a)$	
etc.	etc.	etc.

ubi differentiae per augmentum conſtans $40 \cdot 26 = 1040$ progrediuntur.

Hanc jam poſteriorem reſolutionem maxime ſuccinctam aliquot exemplis illuſtraſſe operae pretium erit.

Exemplum I.

§. 53. Sumatur $b = 81$ et $a = 1$, ita ut numerus examinandus ſit 85333. Hic ergo differentiae a quadrato $bb = 6561$ continuo ſubtrahendae erunt $40(13 \pm 2)$; $40(39 \pm 2)$; etc. quae creſcunt augmento conſtanti $40 \cdot 26 = 1040$; unde ob ſigna ambigua totus hic calculus per duas columnas abſolvi poterit:

6561 - - - - - - -	6561
600	440
5961 - - - - - - -	6121
1640	1480
4321 - - - - - - -	4641
2680	2520
1641 - - - - - - -	2121

Quoniam igitur nullum reſiduorum ex hac ſubtractione natorum quadratum deprehenditur, tuto concludere poſſumus hunc numerum 85333 eſſe primum.

Exem-

Exemplum 2.

§. 54. Maneat $b = 81$ ſitque $a = 10$, et numerus examinandus erit $N = 89293$. Hic igitur a quadrato $bb = 6561$ ſubtrahenda erit differentia $40(13 \pm 20)$, ideoque 1320 et -280; ſequentes autem differentiae crescunt augmento $= 1040$. Hinc calculus ita ſe habet:

6561 - - - - - - -	6561
1320	−280
5241 - - - - - - -	6841
2360	760
2881 - - - - - - -	6081
	1800
	4281
	2840
	1441

Quoniam igitur hic etiam nullum quadratum occurrit, numerus propoſitus 89293 certe erit primus.

Exemplum 3.

§. 55. Maneat adhuc $b = 81$ ſumaturque $a = 19$, ut ſit $N = 99733$; et ad examen hujus numeri neceſſe eſt ut a quadrato 6561 ſubtrahantur differentiae augmento 1040 crescentes, quarum primae ſunt 2040 et -1000, hoc modo:

6561 - - - - - - -	6561
2040	—1000
4521 - - - - - - -	7561
3080	40
1441 - - - - - - -	7521
	1080
	6441
	2120
	4321
	3160
	1161

Quia igitur hic nullum quadratum reſultat, numerus 99733 etiam pro primo eſt habendus.

Exemplum 4.

§. 56. Adjungamus exemplum numeri propoſiti. Maneat iterum $b = 81$ ſitque $a = 1-$, erit $N = 96853$ et ſubtractio differentiarum ita ſe habebit:

6561 - - - - - - -	6561
1880 - - - - - - -	840
4681 - - - - - - -	7401
2920	200
1761 - - - - - - -	7201
	1240
	5961
	2280
	3681
	3320
	*361

Hic

Hic jam occurrit numerus quadratus $*361 = 19^2$ ipſi yy aequandus. Fit igitur $y = 19$, $s = -5$, hincque $x = 48$, unde factor numeri propoſiti inveniri poteſt quaerendo fractionem $\frac{p}{q} = \frac{x \pm a}{y \pm b} = \frac{48 \pm 17}{81 \pm 19} = \frac{1}{2}$; hinc factor eſt $40pp + 13qq = 40.1^2 + 13.3^2$, qui ad minimos terminos reductus eſt $10.1^2 + 13.1^2 = 23$. Alter factor ex eadem fractione derivari poteſt, ſi ſumatur $\frac{p}{q} = \frac{65}{62}$; hinc enim fiet $40pp + 13qq = 40.65^2 + 13.62^2$, qui factor per 4.13 depreſſus dat $10.65.5 + 31^2 = 4211$: at revera eſt $96853 = 23.4211$.

Exemplum 5.

§. 57. Sumatur $a = 40$ et $b = 1$ et numerus examinandus erit $N = 64013$. Hic autem modus procedendi a praecedentibus diverſus adhiberi debet; quia enim a quadrato bb ſubtrahi deberent numeri in forma $40(13ss + 80s)$ contenti, quod autem fieri nequit, hic ſolum ſignum inferius valebit, ita ut ſucceſſive ad quadratum $bb = 1$ addi debeant numeri in forma $S = 40(80s - 13ss)$ contenti, quos cum ſuis differentiis hic adjungamus.

s	S	Diff.
0	0	
+ 1	40 . 67	40 . 67 +
+ 2	40 . 108	40 . 41 +
± 3	40 . 123	40 . 15 +
+ 4	40 . 112	40 . 11 −
etc.	etc.	etc.

ubi differentiae decrescunt quantitate conſtanti 40 . 26; quamobrem, ſi ad unitatem primo addamus numerum 40 . 67 = 2680, tum vero differentias ſequentes decremento

1040 decrescentes: 1640, 600, — 440 — 1480, — 2520, quia inde nullum quadratum resultat, concludimus numerum 64013 esse primum.

§. 58. His circa evolutionem numerorum in forma $40aa + 13bb$ contentorum expeditis, praestabit usum majorum numerorum idoneorum exemplo illustrasse. Consideretur numerus $N = 999601 = 840 . 34^2 + 169^2$, et examinetur, utrum hic numerus propositus plus uno modo in forma idonea $840xx - yy$ contineatur, id quod sine pluris ambagibus sequenti modo satis commode fieri licet.

§. 59. Cum debeat esse $999601 - 840xx = yy$, ipsi x successive tribuantur numeri naturales et numeri S a proposito subtrahendi cum suis differentiis erunt

x	S	Diff.
0	0	
1	1 . 840	1 . 840
2	4 . 840	3 . 840
3	9 . 840	5 . 840
4	16 . 840	7 . 840
etc.	etc.	etc.

Loco S jam continuo subtrahantur differentiae augmento 1680 crescentes, quae subtractiones continuae sequenti modo instituantur.

999601	756841
840	29400
998761	727441
25 0	31080
996241	696361
4200	32760
992041	663601
5880	34440
986161	629161
7560	36120
978601	593041
9240	37800
969361	555241
10920	39480
958441	515761
12600	41160
945841	474601
14280	42840
931561	431761
15960	44520
915601	387241
17640	46200
897961	341041
19320	47880
878641	293161
21000	49560
857641	243601
22680	51240
834961	192361
24360	52920
810601	139441
26040	54600
784561	84841
27720	56280
756841	28561

§. 66. Hic jam duo occurrunt quadrata pro yy. Prius dat $y = 979$ et $x = 7$; posterius praebet casum cognitum $y = 169$ et $x = 34$. Numerus igitur propositus duplici modo in forma idonea $840xx + yy$ continetur, ideoque non

est

eſt primus, ejusque factores ſequenti modo assignari poſſunt. Formetur fractio: $\frac{p}{q} = \frac{x+a}{y+b}$ et ob ſigna ambigua hae quatuor habebuntur fractiones: $\frac{41}{1148} = \frac{1}{28}; \frac{41}{810}, \frac{27}{1148}, \frac{27}{810} = \frac{1}{30}$. Hinc forma factoris $840pp+qq$ ex priore fractione ſit 840.1^2+28^2, ſive per 28 depressus, $30+28 = 15+14 = 29$, qui idem factor etiam prodit ex quarta fractione $\frac{p}{q} = \frac{1}{30}$; hinc enim ſit factor $= 840.1^2+30^2 = 14+15 = 29$. Alter factor vel ex ſecunda vel tertia fractione colligitur; ſumto enim $\frac{p}{q} = \frac{41}{810}$ ſit factor $= 840.41^2+810^2$, qui per 60 depressus eſt $= 14.41^2+27.405 = 34469$. Idem prodit ex fractione $\frac{p}{q} = \frac{27}{1148}$: at vero revera eſt $29.34469 = 999601$.

§. 61. Ex hoc exemplo luculenter apparet, quanti momenti ſint numeri idonei majores in perſcrutandis numeris praegrandibus, utrum ſint primi nec ne. Cum igitur numerus 1848 ſit maximus idoneus, qui in noſtra tabula occurrit, operae pretium erit, in ſubsidium examinis numerorum vehementer magnorum, ſequens problema generalius hic adjungere.

Problema.

Numerum propoſitum quantumvis magnum $N = 1848aa+bb$ *examinare, utrum ſit primus nec ne?*

Solutio.

§. 62. Subtrahantur ab iſto numero N ſuccessive omnes numeri in hac forma: $1848xx$ contenti, et ſi nusquam quadratum remaneat, praeter casum cognitum $x = a$, iſte numerus certe erit primus. Sin autem aliud praeterea quadratum relinquatur, iſte numerus erit compoſitus, ejusque adeo

adeo factores assignare licebit. Verum quia iste calculus ob ingentes numeros continuo subtrahendos non parum est molestus, totum negotium sequenti modo facilius reddi poterit.

§. 63. Statuatur $1848\,aa - (yy - bb) = 1848\,xx$ et cum sit $1848 = 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, ponatur primo $y = 22z + b$ et facta divisione per 8.11 fiet $21\,aa - \frac{1}{2}z(11z + b) = 21\,xx$. Quod si ergo brevitatis gratia ponatur $z(11z + b) = 21\,pq$, aequatio nostra erit $aa - \frac{1}{2}pq = xx$, quae quadruplici modo locum habere potest:

I. Si $11z + b = 21p$ et $z = q$.
II. Si $11z + b = p$ et $z = 21q$.
III. Si $11z + b = 7p$ et $z = 3q$.
IV. Si $11z + b = 3p$ et $z = 7q$.

§. 64. Evolvamus seorsim singulos hos modos et *pro primo casu*, ob $z = q$, erit $11q + b = 21p$, hincque $q = 2p - \frac{p - b}{11} = 2p - s$, ita ut $p + b = 11s$, ideoque $p = 11s - b$, et $q = 21s - 2b = z$, ita ut aequatio nostra fiat

$$aa - \tfrac{1}{2}(11s - b).(21s - 2b) = xx.$$

Pro secundo casu, ob $z = 21q$, erit $231q + b = p$, sicque sumto $q = s$ erit $p = 231s + b$ et $z = 21s$, unde aequatio pro hoc casu erit $aa - \frac{1}{2}s(231s + b) = xx$.

Pro tertio casu, ob $z = 3q$, erit $33q + b = 7p$ ideoque $p = 5q - \frac{2q + b}{7} = 5q - r$, ita ut $2q - b = 7r$ et $2q = 7r + b$, sive $q = 3r + \frac{r + b}{2} = 3r + s$, unde fit $r = 2s - b$, hincque $q = 7s - 3b$ et $p = 33s - 14b$, et $z = 21s - 9b$, unde nostra aequatio erit $aa - \frac{1}{2}(7s - 3b)(33s - 14b) = xx$.

Pro

Pro quarto casu, ob $z = 7q$, erit $77q + b = 3p$, hincque $p = 26q - \frac{q-b}{3} = 26q - s$, existente $s = \frac{q-b}{3}$, unde fit $q = 3s + b$ ideoque $p = 77s + 26b$ et $z = 21s + 7b$, unde aequatio resolvenda erit: $aa - \frac{1}{2}(3s + b)(7s + 26b) = xx$. Ulteriorem calculum sequenti exemplo illustremns.

Exemplum.

§. 65. Sumatur $a = 100$ et $b = 197$, ut numerus examinandus sit $N = 1848aa + bb = 18518809$, ubi facile patet numerum y majorem fore quam 197 ideoque z fore numerum positivum. Hoc observato ad examen hujus ingentis numeri instituendum singulos casus supra a se invicem separatos hic etiam in commodum calculi seorsim evolvamus.

§. 67. *Pro casu primo* nostra aequatio erit $10000 - \frac{1}{2}(11s - b)(21s - 2b) = xx$; et quia hinc est $z = 21s - 394$, patet numerum s majorem esse debere quam 18. Statuamus igitur $s = 18 + t$, ut fiat $z = 21t - 16$, atque aequatio nostra hanc induet formam: $10000 - \frac{1}{2}(11t + 1)(21t + 16) = xx$. Numeri S igitur a numero absoluto 10000 subtrahendi, cum suis differentiis tam pro valoribus ipsius t positivis quam negativis, in sequenti tabula referantur:

t	S	Diff.	t	S	Diff.
0	— 8		0	— 8	
		38			193
+ 1	30		— 1	185	
		269			424
+ 2	299		— 2	609	
		500			655
+ 3	799		— 3	1264	
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

ubi differentiae crescunt augmento constanti 231. At quia primus numerus subtrahendus est — 8, continua differentiarum subtractio fieri debet a numero 10008, ut sequitur.

10008

10008	10008
38	193
9970	9815
269	424
9701	9391
500	655
9201	8736
731	886
8470	7850
962	1117
7508	6733
1193	1348
6315	5385
1424	1579
4891	3706
1655	1810
3236	1996
1886	
1350	

ex quo igitur calculo nullum quadratum resultat.

§. 68. *Pro casu secundo* aequatio resolvenda erit $10000 - \frac{1}{2}s(231s + 197) = xx$. Hic ergo a numero 10000 fubtrahendi funt numeri in forma $S = \frac{1}{2}s(231s \pm 197)$ contenti, qui cum suis differentiis hic exhibentur:

s	S	Diff.	s	S	Diff.
0	0	214	0	0	17
+ 1	214	445	− 1	17	248
+ 2	659	676	− 2	265	479
+ 3	1335		− 3	744	
etc	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

A quadrato igitur 10000 subtrahantur differentiae numero 231 crescentes

10000	10000
214	17
9786	9983
445	248
9341	9735
676	479
8665	9256
907	710
7758	8546
1138	941
6620	7605
1369	1172
5251	6433
1600	1403
3651	5030
1831	1634
1820	3396
	1865
	1531

Ubi iterum nullus numerus quadratus occurrit praeter 10000, qui autem dat casum cognitum.

§. 69. *Pro casu tertio* aequatio examinanda erit $10000 - \frac{1}{2}(7s - 591)(33s - 2758) = xx$, quae igitur, posito $s = 84 + t$, abibit in hanc:
$10000 - \frac{1}{2}(7t - 3)(33t + 14) = xx$. Prouti igitur t valorem habet vel positivum vel negativum, numeri subtrahendi

di S continebuntur in hac forma: $\frac{1}{2}(7t \mp 3)(33t \pm 14)$, et erunt uti hic exhibentur:

t	S	Diff.	t	S	Diff.
0	− 21	115	0	− 21	116
+ 1	+ 94	346	− 1	+ 95	347
+ 2	440	577	− 2	442	578
+ 3	1017		− 3	1020	
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Jam a numero abſoluto 10021 ſubtrahantur differentiae hic assignatae, et, quousque rei natura postulat, continuatae

10021	10021
115	116
9906	9905
346	347
9560	9558
577	578
8983	8980
808	809
8075	8171
1039	1040
7036	7131
1270	1271
5866	5860
1501	1502
4365	4358
1732	1733
2633	2625
1963	1964
670	661

ubi nullum plane quadratum occurrit.

§. 70. *Pro casu quarto* aequatio resolvenda eſt $10000 - \frac{1}{2}(3s+197)(77s+5122) = xx$. Sit brevitatis gratia $s = t - 66$, erit $10000 - \frac{1}{2}(3t-1)(77t+40) = xx$, ſicque numeri ſubtrahendi continentur in forma $S = \frac{1}{2}(3t+1)(77t+40)$, qui cum ſuis differentiis ſunt uti ſequitur:

t	S	Diff.	t	S	Diff.
0	— 20		0	— 20	
		137			94
+ 1	+ 117		— 1	74	
		368			325
+ 2	485		— 2	399	
		599			556
+ 3	1084		— 3	955	
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Hinc ergo ob primum numerum negativum $= -20$ a numero abſoluto 10020 ſubtrahendae erunt differentiae quousque opus eſt continuatae hoc modo:

10020	10020
137	94
9883	9926
368	325
9515	9601
599	556
8916	9045
830	787
8086	8258
1061	1018
7025	7240
1292	1249
5733	5991
1523	1480
4210	4511

1754	1711
2456	2800
1985	1942
471	858

nullum quadratum in hisce reſiduis occurrit.

§. 71. Quoniam igitur in omnibus his quatuor casibus nullum quadratum eſt relictum, certo affirmare poſsumus, numerum 18518809 eſſe primum. Ex hoc exemplo ſimul intelligere licet, ſatis raro evenire posse, ut in talibus operationibus quadrata relinquantur; hanc ob rem forma $1848aa + bb$ etiam aptissima videtur, ad plures inde numeros primos deducendos; tantum enim opus eſt valoros a et b variare, quod, cum infinitis modis fieri queat, inde haud difficulter plures alii numeri primi tam ingentes reperiri poterunt, ut problemati illo *Fermatiano*, quo numeros primos, dato quovis majores, requiruntur, quodammodo ſit ſatisfactum.

§. 72. Quoniam in hoc exemplo numeri ſuccessive a quadrato aa ſubtrahendi iidem manent, quamdiu ſumitur $b = 197$; operae pretium erit pro littera a alios quoque valores, potissimum minores, ſtatuere, ubi totus calculus evadet facillimus. Ut autem, quando quadratum occurrit, pro xx etiam valorem respondentem ipſius y assignare liceat, meminisse oportet, in initio hujus ſolutionis positum fuisse $y = 22z + 197$; tum vero in quaternis casibus allatis ſtatutum fuisse ut ſequitur:

Pro primo casu $z = 21s - 394$, tum vero $s = t + 18$; quamobrem, quia ipſi t tam valores poſitivos quam negativos tribuimus, erit $z = \pm 21t - 16$; ubi ſignum ſuperius pro columna prima, inferius vero pro altera valet.

Pro

Pro secundo casu erat $z = 21s$, unde ob binas columnas cum ambiguitate signorum erit $z = \pm 21s$.

Pro tertio casu erat $z = 21s - 9 \cdot 197$, tum vero $s = t + 84$, unde cum ambiguitate signorum erit $z = \pm 21t - 9$.

Pro quarto casu erat $z = 21s + 7 \cdot 197$; tum vero posuimus $s = t - 66$, unde cum signorum ambiguitate erit $z = \pm 21t - 7$. His notatis sequentes numeros examini subjiciamus.

§. 73. Sit $a = 1$, existente $b = 197$, et numerus propositus erit $N = 40657$. Hic igitur statim ex primo casu occurrit quadratum $aa + 8 = xx$, unde fit $xx = 9$ ideoque $x = 3$, cui respondet valor $t = 0$, ex quo fit $z = -16$, consequenter $y = 155$. Numerus igitur propositus etiam continetur in forma $1848 \cdot 3^2 + 155^2$, unde formatur fractio $\frac{p}{q} = \frac{a \pm x}{b \pm y} = \frac{1 \pm 3}{197 \pm 155}$, cujus valor simplicissimus est $\frac{p}{q} = \frac{1}{21}$. Hinc factor numeri propositi erit $1848\,pp + qq = 1848 \cdot 1^2 + 21^2$, qui per 21 depressus fit $88 + 21 = 109$. Numerus igitur propositus 40657 non est primus, sed divisorem habet 109, quoto existente 373.

§. 74. Sit $a = 2$ eritque numerus propositus $N = 46201$, Hic neque ex primo neque ex secundo casu quadratum resultat, verum ex casu tertio statim fit $aa + 21 = 25 = xx$, unde fit $x = 5$, existente $t = 0$, adeoque $z = -9$, consequenter $y = -9 \cdot 22 + 197 = 1$. Ad divisorem igitur numeri propositi explorandum fiat $\frac{p}{q} = \frac{a + x}{b \pm y} = \frac{1}{28}$, unde pro factore haec prodit forma: $1848 \cdot 1^2 + 28^2 = 33 + 14 = 47$. At revera est $N = 46201 = 47 \cdot 983$.

§. 75. Quoniam autem hic numeros compositos non curamus, superfluum foret examen pro omnibus valoribus ipsius

ipſius a hic ordine apponere. Sufficiet enim omnes numeri primi in forma $1848aa + 197$ contenti ſequenti tabula exhibuisse

Tabula numerorum primorum in forma $1848aa + 197$ contentorum.

Numerus primus . . .	ex valore a
55441	3
85009	5
105337	6
129361	7
157081	8
351121	13
401017	14
454609	15
511897	16
572881	17
705937	19
933241	22
1016401	23
1103257	24
1288057	26
1487641	28
1702009	30
2995609	40
4658809	50
9094009	70
11866009	80
18518809	100

§. 76. Omnes ergo iſti numeri primi deducti ſunt ex formula $1848aa + 197^2$; unde patet, hinc patefactum eſſe fontem inexhauſtum quamplurimos numeros primos ad plures

plures milliones exsurgentes modico labore inveniendi; quandoquidem non solum in eadem formula: $1848\,aa + 197^2$, loco 197 quoque aliis numeris uti licet, sed etiam loco numeri idonei 1848 etiam majores eum praecedentes adhiberi possent. Ac si forte adhuc major numerus idoneus investigari posset, pari labore insuper ad multo majores numeros primos pertingere possemus. At vero examini instituto inveni hujusmodi numeros usque ad terminum 7000 certe non dari; quod autem ultra hunc terminum adhuc dentur numeri idonei, vix probabile videtur.

THEOREMA

Si quispiam numerus idoneus fuerit impariter par, scilicet $N = 4n + 2$, *tum etiam ejus quadruplum in classe numerorum idoneorum reperietur.*

Demonstratio.

§. 77. Cum N sit numerus idoneus, intra intervallum N et $4N$ formula $Nxx + yy$ non nisi numeros primos praebebit. Dico autem hoc casu usque ad $9N$ nullos numeros compositos oriri posse; si enim talis daretur, is tam in forma $N + aa$ quam in forma $4N + bb$ contineretur. Hinc ergo foret $3N = aa - bb$; quia vero $N = 4n - 2$, ista quadratorum differentia $aa - bb$ foret $= 12n + 6$, ideoque numerus impariter par id quod fieri nequit. Hinc igitur certum est, in intervallo ab N usque ad $9N$, nullos existere posse numeros compositos ex formula $Nxx + yy$ oriundos. Ac si hinc oriantur majores numeri compositi in intervallo ab N usque ad $10N$ contenti, ii nullo modo in forma $4Nxx + yy$ continerentur, idque ob rationem praecedentem. Si enim talis numerus compositus foret tam $4N + bb$ quam $9N + cc$, foret $bb - cc = 5N$, hoc est numerus impariter par; ex quo concluditur, etiam intra intervallum $4N$ et $10N$ nullos

nume-

numeros compositos formae $4Nxx + yy$ cadere posse; unde sequitur numerum $4N$ etiam esse idoneum.

§. 78. Hoc etiam colligere licet ex ipsa tabula numerorum idoneorum supra §. 34. exhibita, in qua reperiuntur sequentes numeri impariter pares: 2, 6, 10, 18, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462, quorum ergo quadrupla etiam, vi superioris theorematis, sunt numeri idonei, scilicet: 8, 24, 40, 72, 88, 120, 168, 232, 280, 312, 408, 520, 760, 840, 1320, 1848, qui omnes in eadem tabula occurrunt.

Alia Demonstratio.

§. 79. Sit $2i$ numerus idoneus impariter par, ideoque i numerus impar, et quia natura numerorum idoneorum in hoc consistit, ut omnes numeri unico modo in formula $2ixx + yy$ contenti certe sint primi: necesse est, ut omnis numerus compositus, qui sit C, in eadem formula contentus, simul insuper alio modo in ea contineatur. Ponamus igitur esse $C = 2iaa + bb$ et $C = 2icc + dd$, hincque fiet $2i(aa - cc) = dd - bb$; ubi observetur numeros b et d impares esse debere, quandoquidem primi esse debent ad $2i$, quamobrem quadratorum differentia $dd - bb$ per 8 erit divisibilis.

§. 80. Consideremus jam casum, quo a est numerus par $= 2f$, ita ut fit $C = 2i.4ff + bb$, atque postrema aequatio erit $2i(4ff - cc) = dd - bb$. Hic manifestum est, ut prius hujus aequationis membrum per 8 divisibile fiat, numerum c necessario parem esse debere Sit igitur $c = 2g$, atque hinc sequitur, si numerus compositus C fuerit $= 8iff + bb$, tum adhuc alio modo fore $C = 8igg + dd$;

quocirca ſi alius numerus quicunque N unico modo in forma $8ixx+yy$ contineatur, is certe debebit esse primus; unde manifeſto concluditur, etiam numerum $8i$ in tabula numerorum idoneorum contineri debere.

§. 81. Super tabula autem numerorum idoneorum ſequentes observationes fecisse operae erit pretium:

1°. Videmus in hac tabula alios numeros primos non occurrere, praeter 2, 3, 5, 7, 13 et 37, atque rationes non deſunt numerum 37 tanquam ultimum plane primum in classe numerorum idoneorum spectandi, ſiquidem quo longius procedatur, numeri idonei eo plures factores involvant.

2°. Praeterea cum etiam dupla numerorum primorum in hoc negotio pro primis haberi debeant, etiam tales numeri pauci occurrunt, qui sunt 2.2; 2.3; 2.5; 2.11; 2.29; ita ut 58 pro ultimo talium numerorum habendus videatur, idque ob rationem modo ante allatam, quod ſcilicet numeri idonei continuo plures factores recipiant.

3°. Quoniam in iſto calculo etiam quadrata numerorum primorum pro primis ſunt habita, talia quadrata hic quoque pauca occurrunt, quae ſunt 4, 9, 16, 25, neque enim ob eandem rationem plures admitti posse videntur.

4°. Conſideremus etiam omnes eos numeros idoneos, qui tantum ex duobus factoribus conſtant, ubi quidem ipſum binarium rejicimus, ejus vero poteſtates, perinde ac quadrata numerorum primorum, tanquam ſimplices factores spectamus. Tales numeros tabula noſtra offert ſequentes: 4.3, 3.5, 3.6, 3.7, 4.6, 4.7, 5.6, 5.8, 6.7, 6.8, 3.19, 7.10, 8.9, 6.13, 5.17, 3.31, 6.17, 16.7, 10.13,

10.13, 7.19, 3.59, 10.19, 8.29, 11.23. Reliqui vero omnes vel tres vel adeo plures factores involvunt. His rationibus conjectura noſtra non parum confirmatur, quod, quo longius progrediamur, numeri idonei continuo plures factores involvere debeant.

5° Cum numeri idonei ab initio usque ad 11 omnes numeros complectantur, deinde vero continuo evadant rariores, maxime mirandum. mox tanta intervalla occurrere a talibus numeris prorsus vacua. Veluti in toto intervallo a 520 usque ad 760 nullus plane reperitur; deinde vero ab 840 usque ad 1320, h. e. in intervallo fere quingentorum numerorum, nullus eſt inventus; ac fere per ſimile intervallum a 1365 usque ad 1848 ne unus quidem deprehenditur.

6° Quod autem hic maxime eſt mirandum, poſt iſtum numerum, in tabula noſtra poſtremum, nulli alii a me ſunt inventi, quamquam iſtum calculum usque ad 4 millia ſum profecutus, ita ut totum hoc ſpatium prorſus ſit vacuum.

7° Hinc autem porro concludi oportet, ulterius usque ad 16000 progrediendo nullum ſaltem numerum idoneum pariter parem occurrere posse; ſi enim talis daretur, ejus pars quarta in hanc classem, atque adeo ante 4000, cadere deberet. Quare cum maxime probabile ſit, etiam per hoc intervallum neque numeros impares neque impariter pares reperiri: hinc manifeſto ſequitur, poſtremum numerum noſtrae tabulae 1848 etiam revera esse ultimum, id quod utique tanquam inſigne paradoxon ſpectari poteſt, propterea quod hi numeri ſecundum certam legem formantur, quae adeo in infinitum progredi debere videtur.

OBSERVATIO SINGULARIS

CIRCA AEQUATIONES DIFFERENTIALES LINEARES

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibita die 19. Mart. 1778.

§. 1.

Hoc nomine hodie designari solent aequationes differentiales hujus formae:

$$pz + q\frac{\partial z}{\partial x} + r\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + s\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + t\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \text{etc.} = 0,$$

ubi variabilis z in singulis terminis unicam tantum tenet dimensionem, litterae vero $p, q, r, s,$ etc. denotant functiones quascunque alterius variabilis x, cujus differentiale constans assumitur, quod, quia in singulis terminis homogeneitatem complere debet, brevitatis gratia ubique omittere licebit, sicque illam aequationem in posterum hac forma repraesentabimus:

$$pz + q\partial z + r\partial\partial z + s\partial^3 z + t\partial^4 z + \text{etc.} = 0.$$

§. 2. Constat autem hujusmodi aequationes duobus casibus in genere resolvi posse, altero quo singulae litterae p, q, r, s, t sunt quantitates constantes, altero vero, quo aequationem homogeneam reddunt; priore ergo casu aequatio hanc habebit formam:

$$\alpha z + \beta dz + \gamma ddz + \delta d^3 z + \varepsilon d^4 z + \text{etc.} = 0,$$

cui semper hujusmodi forma satisfacit $z = e^{\lambda x}$, quippe quo valore

valore ſubſtituto, factaque diviſione per $e^{\lambda x}$, oritur aequatio mere algebraica, iſta ſcilicet:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \varepsilon\lambda^4 + \zeta\lambda^5 + \text{etc.} = 0,$$

ex qua ergo tot valores pro littera λ erui poterunt, quoti ordinis fuerit aequatio differentialis, qui valores ſi fuerint a, b, c, d, e etc. hinc adeo integrale completum exhiberi poterit, ita expressum: $z = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + De^{dx} + \text{etc.}$ ubi litterae A, B, C, D etc. ſunt conſtantes arbitrariae per integrationes ingressae.

§. 3. Pro altero casu, quo aequatio evadit homogenea, eam semper ad hanc formam reducere licet:

$$\alpha z + \beta x dz + \gamma xx ddz + \delta x^3 d^3z + \varepsilon x^4 d^4 z \text{ etc.} = 0,$$

cui semper satisfacit hujusmodi forma $z = x^\lambda$. Hinc iterum oritur aequatio algebraica iſta, poſtquam ſcilicet per x^λ fuerit diviſa:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda(\lambda-1) + \delta\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \varepsilon\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + \zeta\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) + \text{etc.} = 0,$$

unde iterum tot valores pro λ eruuntur, quoti gradus fuerit aequatio, qui valores ſi fuerint a, b, c, d, e etc. habebitur integrale completum

$$z = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + Ex^e + \text{etc.}$$

§. 4. Praeter hos duos caſus raro tales aequationes occurrere ſolent, quas quidem reſolvere ſeu integrare liceat, niſi forte data opera a poſteriori fabricentur. Interim tamen ab acutissimis Geometris Gallis non ita pridem inſignia ſubſidia circa tales aequationes ingenioſiſſime ſunt excogitata, quae cum perluſtrassem, in obſervationem quandam prorſus ſingularem incidi, quae mihi quidem in hoc genere maximi momenti videtur, et quam propterea hic in medium proferre conſtitui.

§. 5.

§. 5. Propoſita autem tali forma generali:

$$pz + qdz + rddz - sd^3z + td^4z + \text{etc.} = 0,$$

quae usque ad quartum gradum assurgat, quandoquidem deinceps calculum ad quosvis alios gradus accommodare facile erit, quaero ejusmodi functionem ipſius x, in quam ſi iſta forma ducatur, integrabilis evadat. Sit igitur iſte multiplicator $= m$, ita ut integrabilis esse debeat haec forma:

$$mpz + mqdz + mrddz + msd^3z + mtd^4z = 0,$$

atque duplici modo ad integrale perveniri poteſt, prouti vel a primo termino vel ab ultimo integratio inchoëtur; ubi quidem sponte intelligitur, insuper per elementum dx multiplicationem esse inſtituendam, quod autem brevitatis gratia omittimus.

§. 6. Incipiamus primo a termino ultimo mtd^4z. qui pro integrali praebet terminum mtd^3z; hujus ergo differentiale aufferatur et remanebit haec forma:

$$mpz + mqdz + mrddz + d^3z\,(ms - d.mt).$$

Jam ex hoc poſtremo membro in integrale ingredietur $ddz\,(ms - d.mt)$; hujus jam differentiale iterum auferatur, et remanebit $mpz + mqdz + ddz\,(mr - d.ms + dd.mt)$. Hinc jam novus terminus in integrale ingrediens erit $dz\,(mr - d.ms + dd.mt)$, cuius differentiale allatum relinquit adhuc $mpz + dz\,(mq - d.mr + dd.ms - d^3.mt)$, unde ultimum integralis membrum erit $z\,(mq - d.mr + dd.ms - d^3mt)$, cuius ergo differentiale ſi auferatur, nihil relinqui debebit, unde reſultabit iſta aequatio:

$$mp - d.mq + dd.mr - d^3.ms + d^4.mt = 0.$$

§. 7. Hoc igitur modo deducti sumus ad aequationem differentialem pariter quarti ordinis, ex qua valorem multi-

multiplicatoris quaesiti m investigari oportet, quippe quo invento forma integrata erit

$$mtd^3z + ddz(ms - d.mt) + dz(mr - d.ms + dd.mt) + \\ + z(mq - d.mr + dd.ms - d^3mt),$$

aequatio autem, unde valorem ipsius m erui convenit, est uti invenimus, $mp - d.mq + dd.mr - d^3.ms + d^4.mt = 0$.

§. 8. At vero inverso ordine integrationem a termino primo inchoare licet, siquidem hinc orietur prima integralis pars $z\int mq$, cuius differentiale subtractum relinquet $dz(mq - \int mp) + mrddz + msd^2z + mtd^4z$. Ex prima parte deducitur secunda integralis pars $dz(\int mq - \iint mp)$. Jam hujus differentiale ablatum relinquet $ddz(mr - \int mq + \iint mp) + msd^3z + mtd^4z$. Hinc igitur nascitur tertia integralis pars $ddz(\int mr - \iint mq + \iiint mp)$, hujus porro differentiale ablatum relinquet

$d^3z(ms - \int mr + \iint mq - \int^3 mp) + mtd^4z$, unde postrema integralis pars colligitur:

$d^3z(\int ms - \iint mr + \int^3 mq - \int^4 mp)$, quocirca si hujus differentiale auferatur, nihil relinqui debet, sicque perverietur ad hanc aequationem:

$$mt - \int ms + \iint mr - \int^3 mq + \int^4 mp = 0,$$

unde pariter valorem multiplicatoris quaesiti m investigari oportet.

§. 9. Evidens autem est hanc aequationem posteriorem egregie cum priore consentire, nam haec aequatio differentiata praebet

$$d.mt - ms + \int mr - \iint mq + \int^3 mp = 0,$$

haec autem porro differentiata praebet

$$dd.mt - d.ms + mr - \int mq + \iint mp = 0,$$

quae rursus differentiata dat

$d^3.mt$

$$d^3.mt - d^2ms + d.mr + mq - \int mp = 0,$$

cujus denique differentiale producit ipſam aequationem prius inventam:

$$d^4mt - d^3ms + dd.mr - d.mq + mp = 0.$$

§. 10. Evolvamus nunc hanc aequationem, ex qua multiplicatorem quaeſitum m erui oportet, unde naſcetur ſequens aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} mp - qdm + rddm - sd^3m + td^4m \\ -mdq + 2drdm - 3dsddm + 4dtd^3m \\ +mddr - 3dmdds + 6ddmddt \\ -md^3s + 4dmd^3t \\ +md^4t \end{array}\right\} = 0.$$

§. 12. Quodſi ergo hanc poſtremam aequationem reſolvere, vel ſaltem quodpiam integrale particulare eruere licuerit, talis valor ipſius m ſi in aequationem primo propoſitam multiplicetur, eam integrabilem reddet, ita ut hoc modo per unam integrationem ad gradum inferiorem differentialitatis reducatur. Hanc ob rationem aequationem ultimo inventam vocabimus *aequationem reſolventem* formae propoſitae

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + td^4z = 0,$$

atque hinc patet quomodo pro quavis aequatione differentiali lineari propoſita ejus reſolventem inveniri oporteat.

§. 12. Quo autem formam aequationis reſolventis clarius perſpiciamus, eam hac forma repraeſentemus:

$$Pm + Qdm + Rddm + Sd^3m + Td^4m = 0,$$

ut ad ſimilitudinem aequationis propoſitae revocetur; atque comparatione inſtituta quantitates P, Q, R, S et T per cognitas, quae ſunt p, q, r, s, etc. ſequenti modo determinabuntur:

$$P = p - dq + ddr - d^3s + d^4t$$

$$Q = -q + 2dr - 3dds + 4d^3t$$

$$R =$$

$$R = r - 3ds + 6ddt$$
$$S = -s + 4dt$$
$$T = t.$$

Cujus relationis ope pro quovis casu aequatio resolvens nullo labore exhiberi poterit.

§. 13. Quodsi aequationem resolventem tanquam datam spectare velimus, ex ea vicissim ipsa aequatio prior, cujus est resolvens, exhiberi poterit per sequentes relationes, quibus litterae minusculae p, q, r etc per maiusculas P, Q, R etc. determinantur:

$$t = T$$
$$s = -S + 4dT$$
$$r = R - 3dS + 6ddT$$
$$q = -Q + 3dR - 3ddS + 4d^3T$$
$$p = P - dQ + ddR - d^3S + d^4T.$$

Unde patet litteras minusculas eadem prorsus lege a majusculis pendere, qua hae ab illis pendere sunt inventae.

§. 14. Quaelibet igitur hujusmodi aequatio differentialis cum sua resolvente tali reciproco nexu conjugatur, ut si una fuerit resolvens alterius, vicissim quoque haec resolvens sit illius. Cum igitur hujusmodi binae aequationes tam insigni vinculo sint inter se connexae, eas inter se *conjugatas* appellemus, ita ut quaelibet aequatio hujus indolis suam habeat conjugatam, atque utraque ope alterius resolvi possit. Quodsi enim alterutra resolutionem admittat, simul quoque alterius resolutio semper est in potestate, atque in hoc consistit observatio illa singularis, quae mihi quidem maxime notatu digna videtur; neque enim memini eam a quoquam alio factam vidisse.

§. 15. Scribamus nunc uniformitatis gratia litteram Z loco m, atque binae hujusmodi aequationes conjugatae, cujuscunque fuerint ordinis, sequenti modo repraesententur:

$$p\,z + q\,dz + r\,ddz + s\,d^3z + t\,d^4z + v\,d^5z + \text{etc.} = 0$$
$$P\,Z + Q\,dZ + R\,d^2Z + S\,d^3Z + T\,d^4Z + V\,d^5Z + \text{etc.} = 0$$

ac primo quidem litterae majusculae sequenti lege per minusculas determinabuntur:

$$P = p - dq + ddr - d^3s + d^4t - d^5v + d^6w \text{ etc.}$$
$$Q = -q + 2\,dr - 3\,dds + 4\,d^3t - 5\,d^4v + 6\,d^5w \text{ etc.}$$
$$R = r - 3\,ds + 6\,ddt - 10\,d^3v + 15\,d^4w \text{ etc.}$$
$$S = -s + 4\,dt - 10\,ddv + 20\,d^3w \text{ etc.}$$
$$T = t - 5\,dv + 15\,d^2w \text{ etc.}$$
$$V = -v + 6\,dw \text{ etc.}$$
$$W = w \text{ etc.}$$

Prorsus autem secundum eandem legem litterae minusculae per majusculas determinabuntur; erit enim:

$$p = P - dQ + ddR - d^3S + d^4T - d^5V + d^6W \text{ etc.}$$
$$q = -Q + 2\,dR - 3\,ddS + 4\,d^3T - 5\,d^4V + 6\,d^5W \text{ etc.}$$
$$r = R - 3\,dS + 6\,ddT - 10\,d^3V + 15\,d^4W \text{ etc.}$$
$$s = -S + 4\,dT - 10\,ddV + 20\,d^3W \text{ etc.}$$
$$t = T - 5\,dV + 15\,ddW \text{ etc.}$$
$$v = -V + 6\,dW \text{ etc.}$$
$$w = W \text{ etc.}$$

§. 16. Applicemus hoc ad binos casus initio memoratos, quorum resolutio nulla laborat difficultate, atque prioris aequationis

$$\alpha z + \beta\,dz + \gamma\,ddz + \delta\,d^3z + \varepsilon\,d^4z + \text{etc.} = 0,$$

conjugata erit

$$\alpha Z - \beta\,dZ + \gamma\,ddZ - \delta\,d^3Z + \varepsilon\,d^4Z \text{ etc.} = 0,$$

quae ab illa non discrepat nisi alternatione signorum; pro alterius vero

$$\alpha z + \beta x\,dz + \gamma xx\,ddz + \delta x^3 d^3z + \varepsilon x^4 d^4z \text{ etc.} = 0$$

con-

conjugata habebimus

$P = \alpha - \beta + 2\gamma - 6\delta + 24\varepsilon$ etc.
$Q = -x(\beta - 2 \cdot 2\gamma + 3 \cdot 6\delta - 4 \cdot 24\varepsilon$ etc.)
$R = xx(\gamma - 3 \cdot 3\delta + 6 \cdot 12\varepsilon$ etc.)
$S = -x^3(\delta - 4 \cdot 4\varepsilon$ etc.)
$T = \varepsilon x^4$.

Unde patet aequationem conjugatam etiam esse homogeneam.

§. 17. Quodſi ergo binarum talium aequationum conjugatarum alterutra reſolutionem admittat, tum altera quoque, ſaltem ſemel, integrari poterit; quo facto, ſi inſuper hujus aequationis integratae conjugata reſolutionem admittat, denuo integratio ſuccedet, atque ita porro, quae methodus utique foret non parum operoſa. Verum hic imprimis obſervandum occurrit, quotiescunque integrale completum aequationis reſolventis innotuerit, tum ope facilis operationis non ſolum ipſius aequationis propoſitae

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + \text{etc.} = 0,$$

integrale completum, ſed etiam integrale hujus aequationis multo generalioris:

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + \text{etc.} = X,$$

exhiberi posse, denotante X functionem quamcunque ipſius x, id ſcilicet integrale, quod abſolutis tot integrationibus, quoti gradus fuerit differentialitas, tandem reperiretur, idque adeo ope unicae tantum integrationis, quod, cum plurimum in recessu habere poſſit, hic data opera explicabo.

§. 18. Sufficiet autem aequatienem differentialem tertii tantum gradus ſumſisse, ita ut reſolvenda proponatur haec aequatio:

$$p + qdz + rddz + sd^3z = X,$$

cui reſpondeat iſta conjugata:

$$PZ + Qdz + Rddz + Sd^3Z = 0,$$

cujus integrale completum, quoniam tres conſtantes arbitrarias involvere debet, ita repraeſentari poterit: $Z = A\Phi + B\Phi' + C\Phi''$, ubi ergo litterae Φ, Φ', Φ'', certae erunt functiones ipſius x, quae ſingulae idoneos multiplicatores pro aequatione propoſita praebebunt: multiplicatione autem per Φ facta et integratione inſtituta ponamus reſultare hanc aequationem:

$$\mathfrak{h}z + \mathfrak{Z}dz + \mathfrak{o}ddz = \int X\Phi dx.$$

Simili vero modo ſumto Φ' pro multiplicatore prodeat haec aequatio:

$$\mathfrak{h}'z + \mathfrak{Z}'dz + \mathfrak{o}'ddz = \int X\Phi' dx.$$

Eodemque modo ex multiplicatore Φ'' prodeat

$$\mathfrak{h}''z + \mathfrak{Z}''dz + \mathfrak{o}''ddz = \int X\Phi'' dx.$$

Ubi hae tres integrationes inſtar unicae ſpectari possunt.

§. 19. Totum negotium ergo perduximus ad has tres aequationes:

I. $\mathfrak{h}z + \mathfrak{Z}dz + \mathfrak{o}ddz = \int X\Phi dx.$

II. $\mathfrak{h}'z + \mathfrak{Z}'dz + \mathfrak{o}'ddz = \int X\Phi' dx.$

III. $\mathfrak{h}''z + \mathfrak{Z}''dz + \mathfrak{o}''ddz = \int X\Phi'' dx.$

Ex his tribus aequationibus jam facile eſt binas formulas dz et ddz eliminare. Multiplicetur ſcilicet prima per $\odot$, ſecunda per $\odot'$, tertia per $\odot''$, quae quantitates ita capiantur, ut fiat

$$\odot\mathfrak{Z} + \odot'\mathfrak{Z}' + \odot''\mathfrak{Z}'' = 0, \text{ et}$$
$$\odot\mathfrak{o} + \odot'\mathfrak{o}' + \odot''\mathfrak{o}'' = 0,$$

et hae aequationes in unam ſummam collectae dabunt

$$z(\odot\mathfrak{h} + \odot'\mathfrak{h}' + \odot''\mathfrak{h}'') = \odot\int X\Phi dx + \odot'\int X\Phi' dx + \odot''\int X\Phi'' dx.$$

Sic-

Sicque valor quaesitus quantitatis z erit

$$z = \frac{\odot \int X \Phi \, dx + \odot' \int X \Phi' dx + \odot'' \int X \Phi'' dx}{\odot \flat + \odot' \flat' + \odot' \flat''}$$

haecque expressio adeo est integrale completum aequationis differentialis propositae tertii ordinis, siquidem hic tria occurrunt signa summatoria, quorum quodvis involvit constantem arbitrariam.

DE

DE INTEGRATIONIBUS DIFFICILLIMIS QUARUM INTEGRALIA TAMEN ALIUNDE EXHIBERI POSSUNT.

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibita die 21 Martii 1777.

§. 1.

Cum hodie quidem nemo Geometrarum amplius dubitet, quin omnia imaginaria, undecunque originem trahant, ad hanc formam $A + B\sqrt{-1}$ reduci queant, quanquam haec veritas nondum satis firmis et claris rationibus est demonstrata: certum etiam erit, omnem formulam integralem $\int Z\partial z$, quaecunque Z fuerit functio ipsius z, si in ea loco z scribatur formula imaginaria $v(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$, resolvi posse in duas hujusmodi formulas integrales: $\int p\partial v + \sqrt{-1}.\int q\partial v$, ita ut litterae p et q sint functiones reales ipsius v.

§. 2. Hoc equidem nuper fusius ostendi circa formulas integrales $\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$ et $\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$, unde posito $z = v(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$ ortae sunt ejusmodi formulae integrales, quarum evolutio plura haud contemnenda calculi artificia requirebat. Ex quo intelligitur, si hujusmodi formulae magis fuerint complicatae, atque adeo quantitates irrationales in se involvant, tum formulas inde derivatas $\int p\partial v$ et $\int q\partial v$ ita prodituras esse perplexas, ut nemo facile earum

earum integrationem fuſcipere auſus fuerit, cum tamen, ſi formulae principalis $\int Z \partial z$ integrale fuerit cognitum, exinde valores formularum derivatarum haud difficulter deduci queant.

§. 3. Ad hoc clarius explicandum conſiderabo hic formulam ſimplicissimam $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, quae exprimit arcum circularem, cujus sinus $= z$. Quod ſi jam hic ſtatuatur $z = v(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$, ita ut quaeri debeat forma finita, quae exhibeat arcum, cujus sinus eſt $v(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$, facile patet, facta hac ſubſtitutione reſolutionem formulae integralis haud exiguas ambages poſtulare. Tum enim denominator induet hanc formam: $\sqrt{1 - vv(\cos 2\vartheta + \sqrt{-1}\sin 2\vartheta)}$; unde ante omnia imaginaria elidere oportet, quod quidem fieret ſi numerator et denominator multiplicarentur per formulam $\sqrt{(1 - vv(\cos 2\vartheta - \sqrt{-1}\sin 2\vartheta)}$; tum enim denominator prodiret realis $= \sqrt{1 - 2vv\cos 2\vartheta + v^4}$. At vero numerator fieret aeque intricatus, ſiquidem ſignum radicale etiamnunc involveret tam realia quam imaginaria, quae tamen a ſe invicem ſeparari necesse eſt.

§. 4. Hanc ob rem ipſum denominatorem ante omnia in binas partes ſeparatas, alteram realem alteram ſimpliciter imaginariam reſolvi conveniet, id quod ſequenti modo commodissime praeſtabitur. Introducatur quantitas s, ut ſit $s = \sqrt{1 - 2vv\cos 2\vartheta + v^4}$, et quaeratur angulus ω, ut ſit $\cos 2\omega = \frac{1 - vv\cos 2\vartheta}{s}$ et $\sin 2\omega = \frac{vv\sin 2\vartheta}{s}$; tum enim denominator noſter induet hanc formam: $\sqrt{s\cos 2\omega - s\sqrt{-1}\sin 2\omega}$ quae forma jam ſponte tranſit in hanc: $(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)\sqrt{s}$.

§. 5. Nunc igitur fractionem noſtram $\frac{\partial z}{\sqrt{1-zz}}$ multiplicemus ſupra et infra per $\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega$, eaque abibit in

hanc

hanc formam: $\frac{\partial z\,(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)}{\sqrt{s}}$. Quare cum fit $\partial z = \partial v\,(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$, formula noſtra integranda erit $\frac{\partial v\,(\cos(\vartheta+\omega) + \sqrt{-1}\sin(\vartheta+\omega))}{\sqrt{s}}$, quae ergo jam ultro in duas partes requiſitas reſolvitur, quae ſunt $\int\frac{\partial v\cos(\vartheta+\omega)}{\sqrt{s}} + \sqrt{-1}\int\frac{\partial v\sin(\vartheta+\omega)}{\sqrt{s}}$, ubi eſt $s = \sqrt{1 - 2vv\cos 2\vartheta + v^4}$; tum vero angulum ω ita ſumi oportet, ut ſit $\text{tang}\,2\omega = \frac{vv\sin 2\vartheta}{1 - vv\cos 2\vartheta}$. Hic autem evidens eſt, ſi loco s et ω hos valores re ipſa ſubſtituere vellemus, has formulas tantopere fieri complicatas, ut vix ulla via pateat eas reſolvendi.

§. 6. Quo hoc clarius eluceat, retineamus primo quantitatem s in calculo, et cum ſit $\cos 2\omega = \frac{1 - vv\cos 2\vartheta}{s}$, hinc deducimus

$$\cos\omega = \sqrt{\frac{1+\cos 2\omega}{2}} = \sqrt{\frac{s+1-vv\cos 2\vartheta}{2s}} \text{ et}$$
$$\sin\omega = \sqrt{\frac{1-\cos 2\omega}{2}} = \sqrt{\frac{s-1+vv\cos 2\vartheta}{2s}}$$

unde pro formula reali integrali erit

$$\cos(\vartheta+\omega) = \cos\vartheta\sqrt{\frac{s+1-vv\cos 2\vartheta}{2s}} - \sin\vartheta\sqrt{\frac{s-1+vv\cos 2\vartheta}{2s}}.$$

Hinc jam formula realis $\int\frac{v\cos(\vartheta+\omega)}{\sqrt{s}}$ reſolvetur in duas ſequentes:

$$\cos\vartheta\int\frac{\partial v}{s\sqrt{2}}\sqrt{(s+1-vv\cos 2\vartheta)} - \sin\vartheta\int\frac{\partial v}{s\sqrt{2}}\sqrt{(s-1+vv\cos 2\vartheta)}.$$

Quod ſi jam hic inſuper loco s ſuum valorem ſurrogare velimus, unde fieret $s = \sqrt{(1 - 2vv\cos 2\vartheta + v^4)}$, vix credo quemquam fore, qui voluerit in formula tantopere intricata reſolvenda vires ſuas ſaltem tentare. Facta enim ſubſtitutione loco s hae duae formulae ſequenti modo prodibunt expreſſae:

$$\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2v^2\cos 2\vartheta+v^4}+1-vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}},$$
$$-\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}-1+vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}}.$$

§. 7.

§. 7. Simili modo pro parte imaginaria, ob $\sin(\vartheta+\omega) = \sin\vartheta\cos\omega + \cos\vartheta\sin\omega$, ista pars componetur ex binis sequentibus formulis integralibus:

$$\frac{\sin\vartheta\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial v\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}+1+vv\cos 2\vartheta)}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}}$$
$$+\frac{\cos\vartheta\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial v\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}-1+vv\cos 2\vartheta)}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}}.$$

Unde etiam perspicuum est, totum laborem ad integrationem duarum tantum formularum integralium esse perductum, quae autem ita sunt complicatae, ut vix quisquam laborem sit suscepturus.

§. 8. Eo magis igitur erit mirandum, si haec ipsa integralia actu assignari poterunt. Cum enim iis junctim sumtis exprimatur arcus circuli, cujus sinus est $v(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta)$, si hunc arcum designemus per $x+y\sqrt{-1}$, ita ut x exhibeat integrale binarum illarum formularum realium, at $y\sqrt{-1}$ integrale binarum formularum imaginariarum, erit vicissim $v(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta) = \sin(x+y\sqrt{-1}) = \sin x\cos y\sqrt{-1}+\cos x\sin y\sqrt{-1}$. Cum jam constet esse $\cos\Psi = \frac{1}{2}(e^{\Psi\sqrt{-1}}+e^{-\Psi\sqrt{-1}})$, posito $\Psi = y\sqrt{-1}$, erit $\cos y\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{+y})$. Deinde quia est $\sin\Psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\Psi\sqrt{-1}}-e^{-\Psi\sqrt{-1}})$, erit $\sin y\sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-y}-e^{+y})$.

§. 9. Substituantur igitur isti valores, ac prodibit ista aequatio:

$$v(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta) = \tfrac{1}{2}\sin x(e^{-y}+e^{+y})+\frac{\cos x}{2\sqrt{-1}}(e^{-y}-e^{+y}),$$

ubi partes reales et imaginarias seorsim aequari oportet, unde duae sequentes determinationes emergunt:

$v\cos\vartheta = \frac{1}{2}\sin x(e^{-y}+e^{+y})$ et $v\sin\vartheta = \frac{1}{2}\cos x(e^{y}-e^{-y})$. Neque jam adeo erit difficile hinc binas quantitates x et y determinare.

§. 10. Cum ex priore aequatione habeamus $\sin x = \frac{2v\cos\vartheta}{e^y+e^{-y}}$, ex altera vero $\cos x = \frac{2v\sin\vartheta}{e^y-e^{-y}}$, horum valorum quadrata invicem addita producent hanc aequationem: $1 = \frac{4vv\cos\vartheta^2}{(e^y+e^{-y})^2} + \frac{4vv\sin\vartheta^2}{(e^y-e^{-y})^2}$, unde ergo quantitatem y elicere oportet. Ad hoc autem notasse plurimum juvabit esse $(e^y+e^{-y})^2 = e^{2y}+e^{-2y}+2$ et $(e^y-e^{-y})^2 = e^{2y}+e^{-2y}-2$, unde si brevitatis gratia statuamus $e^{2y}+e^{-2y} = 2t$, aequatio inventa induet hanc formam: $1 = \frac{2vv\cos\vartheta^2}{t+1} + \frac{2vv\sin\vartheta^2}{t-1}$, unde resultat ista aequatio quadratica $tt-1 = 2tvv-2vv\cos 2\vartheta$.

§. 11. Hujus jam aequationis resolutio praebet $t = vv+\sqrt{v^4-2vv\cos 2\vartheta+1} = vv+s$. Jam cum posuerimus $e^{2y}+e^{-2y} = 2t$, hinc elicitur $e^{2y} = t+\sqrt{tt-1}$, ideoque $e^{-2y} = t-\sqrt{tt-1}$. Quoniam igitur quantitatem t per v definivimus, logarithmis sumendis erit $y = \frac{1}{2}l(t+\sqrt{tt-1})$, quae ergo formula aequatur binis posterioribus formulis integralibus, imaginario $\sqrt{-1}$ omisso.

§. 12. Deinde vero, cum sit $e^y+e^{-y} = \sqrt{2t+2}$ et $e^y-e^{-y} = \sqrt{2t-2}$, pro quantitate x invenienda geminam habebimus aequationem, scil: $\sin x = \frac{2v\cos\vartheta}{\sqrt{2t+2}}$ et $\cos x = \frac{2v\sin\vartheta}{\sqrt{2t-2}}$. Sicque ipsa quantitas x erit $= A\sin\frac{2v\cos\vartheta}{\sqrt{2t+2}}$, atque hic ipse arcus circularis aequabitur summae binarum priorum formularum integralium realium.

§. 13. Postquam igitur posuerimus brevitatis gratia $t = vv+\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}$, valores integralium supra inven-

inventorum ita se habebunt:

$$A \sin \frac{v \cos \vartheta}{\sqrt{(2t+2)}} = \begin{cases} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}+1-vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}} \\ -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}-1+vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}} \end{cases}.$$

Similique modo erit

$$\tfrac{1}{2} l(t+\sqrt{tt-1}) = \begin{cases} \frac{\sin \vartheta \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}+1-vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}} \\ +\frac{\cos \vartheta \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}-1+vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos 2\vartheta+v^4)}} \end{cases}.$$

Ubi notetur, loco $A \sin \frac{2v \cos \vartheta}{\sqrt{(2t+2)}}$ scribi posse $A \operatorname{tag} \frac{\cos \vartheta \sqrt{(t-1)}}{\sin \vartheta \sqrt{(t+1)}}$.

§. 14. Hos autem valores integrales per t expressos penitius perscrutari operae erit pretium. Cum enim sit $t+1 = 1+vv+\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}$, erit radicem extrahendo

$$\sqrt{t+1} = \sqrt{\frac{1+2v\cos\vartheta+vv}{2}} + \sqrt{\frac{1-2v\cos\vartheta+vv}{2}}.$$

Simili modo cum sit $t-1 = vv-1+\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}$, erit $\sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1+2v\sin\vartheta\sqrt{-1}+vv}{2}} + \sqrt{\frac{1-2v\sin\vartheta\sqrt{-1}+vv}{2}}$.

His igitur valoribus substitutis pro priore integratione fiet

$$A \operatorname{tang} \frac{\cos\vartheta\sqrt{(t-1)}}{\sin\vartheta\sqrt{(t+1)}} = A \operatorname{tang} \frac{\cos\vartheta\,(\sqrt{1+2v\sin\vartheta\sqrt{-1}+vv}+\sqrt{1-2v\sin\vartheta\sqrt{-1}+vv})}{\sin\vartheta\,(\sqrt{1+2v\cos\vartheta+vv}+\sqrt{1-2v\cos\vartheta+vv})}$$

Pro altera autem forma logarithmica, quoniam est $\frac{1}{2} l(t+\sqrt{tt-1}) = l(\sqrt{\frac{t+1}{2}} + \sqrt{\frac{t-1}{2}})$, erit valor integralis posterior

$$\log \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{1+2v\cos\vartheta+vv} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2v\cos\vartheta+vv} \\ +\frac{1}{2}\sqrt{1+2v\sin\vartheta\sqrt{-1}+vv} + \frac{1}{2}\sqrt{1-2v\sin\vartheta\sqrt{-1}+vv} \end{cases}.$$

§. 15. Haud incommode autem ipsos hos valores integrales etiam per formulas integrales exprimere licet. Cum enim sit

$$\partial . A \operatorname{tang} \frac{\cos\vartheta\sqrt{(t-1)}}{\sin\vartheta\sqrt{(t+1)}} = \frac{\partial t \sin\vartheta\cos\vartheta}{(t-\cos 2\vartheta)\sqrt{(tt-1)}},$$

prior integratio nunc erit $= \int \frac{\partial t \sin\vartheta\cos\vartheta}{(t-\cos 2\vartheta)\sqrt{(tt-1)}}$, scilicet

binae formulae integrales priores aequabuntur huic unicae; binae posteriores vero, quae aequales erant $\frac{1}{2}l(t+\sqrt{tt-1})$, aequabuntur huic formulae integrali: $\frac{1}{2}\int\frac{\partial t}{\sqrt{(tt-1)}}$.

§. 16. Quantumvis autem hae formulae integrales difficiles videbantur, tamen, quia earum integralia constant, atque adeo per logarithmos et arcus circulares exprimi possunt, non amplius tantopere difficile erit in methodum inquirere haec ipsa integralia eruendi, id quod sequenti modo commodissime expediri posse videtur.

Integratio formularum:

$$\mathfrak{P}=\int\frac{\partial v\,v^4\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}+1-2vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}},$$

$$\mathfrak{Q}=\int\frac{\partial v\,v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}-1+vv\cos 2\vartheta)}}{\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}}.$$

§. 17. Hic ante omnia opus est formulam radicalem $\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}$ ex calculo expellere, quod aptissime fiet loco v introducendo ipsam quantitatem t, quae erat $t=vv+\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}$, unde elicitur $vv=\frac{1-tt}{2(\cos 2\vartheta-t)}$ atque hinc habebimus $\sqrt{1-2vv\cos 2\vartheta+v^4}=\frac{tt-2t\cos 2\vartheta+1}{2t-2\cos 2\vartheta}$. Deinde vero erit $1-vv\cos 2\vartheta=\frac{-tt\cos 2\vartheta+2t-\cos 2\vartheta}{2t-2\cos 2\vartheta}$.

§. 18. His jam valoribus substitutis nostrae formulae integrales sequentes induent formas:

$$\mathfrak{P}=\int\frac{\partial v(t+1)\sqrt{2(t-\cos 2\vartheta)(1-\cos 2\vartheta)}}{tt-2t\cos 2\vartheta+1},\text{ et}$$

$$\mathfrak{Q}=\int\frac{\partial v(t-1)\sqrt{2(t-\cos 2\vartheta)(1+\cos 2\vartheta)}}{tt-2t\cos 2\vartheta+1},$$

quae ob $1-\cos 2\vartheta=2\sin\vartheta^2$ et $1+\cos 2\vartheta=2\cos\vartheta^2$ transi-

transibunt in has:

$$\mathfrak{P} = \int \frac{2\partial v\,(t+1)\sin\vartheta\sqrt{1-\cos 2\vartheta}}{tt-2t\cos 2\vartheta+1},$$

$$\mathfrak{Q} = \int \frac{2\partial v\,(t-1)\cos\vartheta\sqrt{t-\cos 2\vartheta}}{tt-2t\cos 2\vartheta+1}.$$

§. 19. Tantum igitur supereſt, ut loco ∂v valor debitus ſubſtituatur. Cum igitur ſit $2vv = \frac{tt-1}{t-\cos 2\vartheta}$, erit differentiando

$$4v\partial v = \frac{\partial t\,(tt-2t\cos 2\vartheta+1)}{(t-\cos 2\vartheta)^2}, \text{ ideoque}$$

$$\partial v = \frac{(tt-2t\cos 2\vartheta+1)\partial t\sqrt{2}}{4\sqrt{tt-1}(t-\cos 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

hocque valore introducto fiet

$$\mathfrak{P} = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\int \frac{\partial t\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}\,(t-\cos 2\vartheta)}, \text{ et}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{2}}\int \frac{\partial t\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}\,(t-\cos 2\vartheta)},$$

quarum formularum integratio nulla amplius laborat difficultate, quandoquidem facile ab omni irrationalitate liberari poſsunt.

§. 20. Tantum enim opus eſt poni $\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} = u$, tum enim erit $t = \frac{uu+1}{uu-1}$, ideoque

$t - \cos 2\vartheta = \frac{uu(1-\cos 2\vartheta)+1+\cos 2\vartheta}{uu-1} = \frac{2uu\sin\vartheta^2+2\cos\vartheta^2}{uu-1}$, tum vero erit $\partial t = -\frac{4u\partial u}{(uu-1)^2}$, quocirca erit

$\frac{\partial t}{t-\cos 2\vartheta} = -\frac{2u\partial u}{(uu-1)(uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2)}$, ex quo ambae noſtrae formulae ita prodibunt rationaliter expressae;

$$\mathfrak{P} = -\sin\vartheta\sqrt{2}\int \frac{uu\partial u}{(uu-1)(uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2)}$$

$$\mathfrak{Q} = -\cos\vartheta\sqrt{2}\int \frac{\partial u}{(uu-1)(uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2)},$$

quarum ergo integratio per regulas notissimas facile expeditur.

§. 21.

§. 21. Quoniam denominator duobus conſtat factoribus, pro priore formula ſtatuamus

$$\frac{uu}{(uu-1)(uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2)} = \frac{F}{uu-1} + \frac{G}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2},$$

ac reperietur $F = \frac{uu}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2)}$, poſito $uu-1=0$, ſicque erit $F=1$; tum vero reperitur $G = \frac{uu}{uu-1}$, poſito $uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2=0$, ſive $uu\sin\vartheta^2=-\cos\vartheta^2$, unde ſit $G=\cos\vartheta^2$. Hinc $\flat$ in has duas formulas reſolvitur:

$$\flat = -\sin\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u}{uu-1} - \sin\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u\cos\vartheta^2}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2}.$$

Eſt vero $\int\frac{\partial u}{uu-1} = \frac{1}{2}l\frac{u-1}{u+1}$ et

$$\int\frac{\partial u}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\text{A tang}\,\frac{u\sin\vartheta}{\cos\vartheta},$$

quam obrem habebimus

$$\flat = -\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}l\frac{u-1}{u+1} - \sqrt{2}\cos\vartheta^2\,\text{A tang}\,\frac{u\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Quod ſi jam hic loco u ſcribamus valorem $\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$, erit

$$\flat = -\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}l\frac{\sqrt{t-1}-\sqrt{-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} - \cos\vartheta^2\sqrt{2}\,\text{A tang}\,\frac{\sin\vartheta\sqrt{t+1}}{\cos\vartheta\sqrt{-1}},$$

cujus conſenſus cum integralibus ſupra exhibitis facile perſpicitur.

§. 22. Simili modo pro $\mathfrak{A}$ ſtatuamus

$$\frac{1}{(uu-1)(uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2)} = \frac{F}{uu-1} + \frac{G}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2},$$

eritque $F = \frac{1}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2}$, poſito $uu-1=0$, ſive $u=1$, unde ergo prodit $F=1$. Deinde erit $G = \frac{1}{uu-1}$, poſito $uu = -\frac{\cos\vartheta^2}{\sin\vartheta^2}$, ideoque $G = -\sin\vartheta^2$; ſicque formula pro $\mathfrak{A}$ inventa in has partes reſolvitur:

$$\mathfrak{A} = -\cos\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u}{uu-1} + \cos\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u\sin\vartheta^2}{uu\sin\vartheta^2+\cos\vartheta^2}.$$

Vidimus autem eſſe $\int\frac{\partial u}{uu-1} = \frac{1}{2}l\frac{u-1}{u+1}$, hic vero erit $\int\frac{\partial u\sin\vartheta^2}{uu\sin\partial^2-\cos\vartheta^2} = \sin\vartheta\,\text{A tang}\,\frac{u\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$, ſicque habebimus

$$\mathfrak{A} = -\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{2}}l\frac{u-1}{u+1} + \sin\vartheta\cos\vartheta\sqrt{2}\,\text{A tang}\,\frac{u\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Ac ſi hic iterum loco u ſcribamus valorem $\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}$, erit

$$\mathfrak{A} = -\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{2}}l\frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} + \sin\vartheta\cos\vartheta\sqrt{2}\,\text{A tang}\,\frac{\sin\vartheta\sqrt{t+1}}{\cos\vartheta\sqrt{t-1}}.$$

§. 23.

§. 23. Haec autem resolutio ideo successit quod formula principalis proposita $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$ fuit in suo genere quasi simplicissima; unde facile intelligitur, si ejus loco aliae formulae difficiliores proponantur, tum resolutionem sine dubio multo magis futuram esse arduam, neque adeo expediri posse, nisi ipsa formula proposita per logarithmos et arcus circulares integrari queat. Sin autem hoc contigerit, quemadmodum evenit in hac formula: $\int \frac{\partial z}{(1 \pm z^n)^{\frac{1}{n}}}$, sive adeo in hac: $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{(1 \pm z^n)^{\frac{m}{n}}}$, tum etiam posito $z = v(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)$, certum erit, formulas integrales inde deductas, quantumvis fuerint perplexae, tamen semper etiam per logarithmos et arcus circulares resolvi posse, id quod unico exemplo ostendere conabimur.

Problema.

Si in formula integrali $\int \frac{\partial z}{\sqrt{3}(1+z3)}$ ponatur $z = v(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)$, unde haec formula resolvatur in has: $\int P \partial v + \sqrt{-1} \int Q \partial v$, ambas istas formulas integrales, quippe quae semper reales esse possunt, investigare.

Solutio.

§. 24. Hic ergo pro denominatore statim erit $1 + z^3 = 1 + v^3 (\cos 3\vartheta + \sqrt{-1} \sin 3\vartheta)$, unde statuamus $\sqrt{1 + 2v^3 \cos 3\vartheta + v^6} = s$, et quaeramus angulum 3ω, ut sit $\cos 3\omega = \frac{1 + v3 \cos 3\vartheta}{s}$ et $\sin 3\omega = \frac{v3 \sin 3\vartheta}{s}$, quo facto erit $1 + z^3 = s(\cos 3\omega + \sqrt{-1} \sin 3\omega)$, ideoque $\sqrt[3]{(1 + z^3)} = \sqrt[3]{s}$. $\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega$, unde formula proposita erit

$$\int \frac{\partial z}{(\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega) \sqrt[3]{s}} = \int \frac{\partial z (\cos \omega - \sqrt{-1} \sin \omega)}{\sqrt[3]{s}}.$$

§. 25.

§. 25. Cum nunc fit $\partial z = \partial v (\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$, formula refolvenda erit $\int \frac{\partial v (\cos(\vartheta-\omega) + \sqrt{-1}\sin(\vartheta-\omega))}{\sqrt[3]{s}}$; quamobrem pro refolutione quaefita erit

$$\int P\partial v = \int \frac{\partial v \cos(\vartheta-\omega)}{\sqrt[3]{s}} \quad \text{et} \quad \int Q\partial v = \int \frac{\partial v \sin(\vartheta-\omega)}{\sqrt[3]{s}},$$

quarum ergo formularum integralia inveftigari oportet. Evidens autem eft hinc angulum ω neutiquam commode per v exprimi poffe. Etsi enim $\tan 3\omega = \frac{v3 \sin 3\vartheta}{1 + v3 \cos 3\vartheta}$, hic trifectione anguli opus foret, unde formulae noftrae plane inextricabiles prodirent.

§. 26. Maxime igitur memorabile eft, has ambas formulas integrales in quibus eft $s = \sqrt{(1 + 2v^3\cos\vartheta + v^6)}$ et $\tan 3\omega = \frac{v3 \sin 3\vartheta}{1 + v3 \cos 3\vartheta}$, quas vix ac ne vix quidem per folam v referre liceret, nihilominus per logarithmos et arcus circulares integrari posse. Facile autem intelligitur per idoneam fubftitutionem loco v aliam variabilem idoneam in calculum introduci debere, cujus ope hae formulae fimpliciores reddi queant, id quod commodifsime fieri poffe videtur, si loco v angulus Φ introducatur, ita ut fit $\Phi = \vartheta - \omega$, unde ftatim oritur $\int P\partial v = \int \frac{\partial v \cos\Phi}{\sqrt[3]{s}}$ et $\int Q\partial v = \int \frac{\partial v \sin\Phi}{\sqrt[3]{s}}$, ubi ergo litteras v et s per Φ exprimi oportet.

§. 27. Cum fit $\tan 3\omega = \frac{v3 \sin 3\vartheta}{1 + v3 \cos 3\vartheta}$, fi hunc angulum 3ω introducamus, erit $\operatorname{tg}(3\vartheta - 3\omega) = \frac{\tan 3\vartheta - \tan 3\omega}{1 + \tan 3\vartheta \tan 3\omega}$, unde ob $3\vartheta - 3\omega = 3\Phi$ elicitur $\tan 3\Phi = \frac{\sin 3\vartheta}{v3 + \cos 3\vartheta}$, unde reperimus $v^3 + \cos 3\vartheta = \frac{\sin 3\vartheta}{\tan 3\Phi}$. Hinc fumtis quadratis erit

$$v^6 + 2v^3\cos 3\vartheta + \cos 3\vartheta^2 = \sin 3\vartheta^2 \frac{\cos 3\Phi^2}{\sin 3\Phi^2}.$$

Addatur utrinque $\sin 3\vartheta^2$ eritque

$$v^6 + 2v^3\cos 3\vartheta + 1 = ss = \frac{\sin 3\vartheta^2}{\sin 3\Phi^2}, \text{ ideoque } s = \frac{\sin 3\vartheta}{\sin 3\Phi}.$$

Hacte-

Hactenus igitur noſtrae formulae ad ſequentes formas ſunt reductae:

$$\int P\partial v = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin 3\vartheta}} \int \partial v \cos\Phi \sqrt[3]{\sin 3\Phi}$$
$$\int Q\partial v = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin 3\vartheta}} \int \partial v \sin\Phi \sqrt[3]{\sin 3\Phi}.$$

§. 28. Cum denique ſit $v^3 = \frac{\sin 3\vartheta}{\tang s\Phi} - \cos 3\vartheta$, erit differentiando $3vv\partial v = -\frac{3\partial\Phi \sin 3\vartheta}{\sin 3\Phi^2}$, ideoque $\partial v = -\frac{\partial\Phi \sin 3\vartheta}{vv \sin 3\Phi^2}$. Cum igitur ſit $v^3 = \frac{\sin 3(\vartheta-\Phi)}{\sin 3\Phi}$, erit $vv = \frac{(\sin 3(\vartheta-\Phi))^{\frac{2}{3}}}{\sin 3\Phi^{\frac{2}{3}}}$, unde ſit $\partial v = -\frac{\partial\Phi \sin 3\vartheta}{(\sin 3(\vartheta-\Phi)^{\frac{2}{3}} \sin 3\Phi^{\frac{4}{3}}}$, ſicque formulae noſtrae, ad ſolam variabilem Φ reductae, erunt

$$\int P\partial v = -\sin 3\vartheta^{\frac{2}{3}} \int \frac{\partial\Phi \cos\Phi}{\sin 3\Phi (\sin 3(\vartheta-\Phi))^{\frac{2}{3}}}$$
$$\int Q\partial v = -\sin 3\vartheta^{\frac{2}{3}} \int \frac{\partial\Phi \sin\Phi}{\sin 3\Phi (\sin 3(\vartheta-\Phi))^{\frac{2}{3}}}$$

quarum formularum integratio haud exiguam dexteritatem in calculo angulorum poſtulat.

§. 29. Ut calculum ad ſolitas quantitates revocemus, ſtatuamus $\tang\Phi = t$, ut ſit

$$\sin\Phi = \frac{t}{\sqrt{1+tt}} \text{ et } \cos\Phi = \frac{1}{\sqrt{1+tt}}, \text{ unde ſit}$$

$$\partial\Phi \cos\Phi = \frac{\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \partial\Phi \sin\Phi = -\frac{t\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}.$$

Praeterea vero habebitur $\tang 3\Phi = \frac{3t-t^3}{1-3tt}$, unde ſit

$$\sin 3\Phi = \frac{3t-t^3}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \cos 3\Phi = \frac{1-3tt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Hinc porro}$$

conficitur $\sin 3(\vartheta - \Phi) = \frac{\alpha(1-3tt) - 3t + t^3}{\sqrt{1 + \alpha\alpha}(1+tt)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque

$$(\sin 3(\vartheta - \Phi))^{\frac{2}{3}} = \frac{(\alpha(1-3tt) - 3t + t^3)^{\frac{2}{3}}}{(1+\alpha\alpha)^{\frac{1}{3}}(1+tt)}.$$

Hisque valoribus substitutis nanciscemur

$$\int P\partial v = -\alpha^{\frac{2}{3}} \int \frac{\partial t(1+tt)}{(3t-t^3)(\alpha(1-3tt)-3t+t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\int Q\partial v = +\alpha^{\frac{2}{3}} \int \frac{t\partial t(1+tt)}{(3t-t^3)(\alpha(1-3tt)-3t+t^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Certo igitur affirmare licet, has formulas ab irrationalitate penitus liberari posse, etiamsi mihi quidem nulla via patere videatur hoc praestandi; unde Geometris amplissimus campus aperitur suam sagacitatem exercendi.

§. 30. Si loco formulae $\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{1+z^3}}$ assumsissemus generalem $\int \frac{\partial z}{\sqrt[n]{(1+z^n)}}$, eamque simili modo tractavissemus, pervenissemus ad sequens theorema:

Integralia harum duarum formularum:

$$\int \frac{\partial\Phi \sin\Phi}{\sin n\Phi (\sin(n\vartheta - n\Phi))^{\frac{n-1}{n}}} \text{ et } \int \frac{\partial\Phi \cos\Phi}{\sin n\Phi (\sin(n\vartheta - n\Phi))^{\frac{n-1}{n}}}$$

certe per logarithmos et arcus circulares exprimi possunt, ideoque dabitur certa substitutio, cujus ope hae formulae ad rationalitatem perduci possunt; unde haec observatio eo majorem attentionem meretur.

DIS-

DISQUISITIONES ANALYTICAE
SUPER EVOLUTIONE POTESTATIS TRINOMIALIS
$(1+x+xx)^n$.

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibita die 17. Aug. 1778.

§. 1.

Cum olim *in Novorum Commentariorum Tomo XI,* ſub titulo *observationum analyticarum,* iſtam poteſtatem trinomialem multo ſtudio essem perscrutatus, in tam egregia symptomata incidi, quae majore attentione Geometrarum non indigna videbantur. Hanc ob rem nuper hoc idem argumentum denuo tractare ſuscepi, atque nonnullis artificiis analyticis usus, multo plura inſignia phaenomena ſe mihi obtulerunt, quorum expoſitionem Geometris non ingratam fore confido.

§. 2. Incipio igitur ab ipsa evolutione hujus formulae: $(1+x+xx)^n$, quae pro ſingulis valoribus exponentis n ſequentes praebet expressiones in tabula ſubjuncta repraesentatas:

n	$(1+x+xx)^n$
0	1
1	$1+x+xx$
2	$1+2x+3xx+2x^3+x^4$
3	$1+3x+6xx+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$
4	$1+4x+10xx+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$
5	$1+5x+15xx+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$.
etc.	etc.

Hic ſcilicet ex qualibet poteſtate facillime ſequens deducitur; ſi enim pro quolibet valore exponentis n, quilibet coëfficiens cum binis praecedentibus in unam ſummam colligatur, obtinetur coëfficiens pro poteſtate ſequente exponentis $n+1$ ſubſcribenda.

§. 3. Hanc tabulam aſpicienti ſtatim patet, in qualibet evolutione coefficientes terminorum usque ad medium, qui dignitatem x^n refert, crescere, inde autem iterum eodem ordine decrescere, usque ad ultimum terminum, qui eſt x^{2n}. Deinde etiam haud difficulter perſpicitur, pro poteſtate $(1+x+xx)^n$ in genere terminos initiales ita expressum iri:

$$1 + nx + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{n(n-1)(nn+7n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)(n+12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \text{etc.}$$

Hos autem terminos ulterius prosequi non attinet, quia in eorum coëfficientibus nullus ordo deprehenditur.

§. 4. Hic autem imprimis ad coëfficientem maximum ſeu medium reſpicio, quem pro poteſtate $(1+x+xx)^n$ in genere perpetuo ſtatuam $= px^n$; tum vero terminos hunc ſequentes ita repraesentabo: qx^{n+1}, rx^{n+2}; sx^{n+3}; tx^{n+4}; etc. unde termini medium praecedentes erunt ordine retrogrado qx^{n-1}; rx^{n-2}; sx^{n-3}; tx^{n-4}; etc. Deinde vero pro poteſtate ſequenti $(1+x+xx)^{n+1}$ easdem litteras apice ſum notaturus; ſcilicet: $p', q', r' s'$, etc. quas porro pro poteſtate denuo ſequente $(1+x+xx)^{n+2}$ apici duplici deſignabo; pro ſequentibus, apice triplici, quadruplici, et ita porro.

§. 5. His praemissis, in hac dissertatione ex ſeriebus ſuperioris tabulae potissimum terminos medios, maximis coëfficientibus affectos, ſum contemplaturus, qui ſunt

ſunt: $1, x, 3x^2, 7x^3, 19x^4, 51x^5$, etc. qui junctim ſumti conſtituunt ſeriem, cujus ſummam littera P indicabo, ita ut

$$P = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 19x^4 + 51x^5 \ldots + px^n + p'x^{n+1} + p''x^{n+2} + \text{etc.}$$

§. 6. Praeterea vero, quemadmodum iſti termini ex tabula ſuperiore ſecundum diagonalem ſunt deſumti, ſimili modo tales ſeries formemus ſecundum diagonales ulteriores illi parallelas, quarum ſerierum ſummas pariter peculiaribus litteris denotemus ſequenti modo:

$$Q = x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 16x^5 + 45x^6 + \ldots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + q''x^{n+3} + \text{etc.}$$
$$R = x^4 + 3x^5 + 10x^6 + 30x^7 + \ldots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + r''x^{n+4} + \text{etc.}$$
$$S = x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \ldots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + s''x^{n+5} + \text{etc.}$$
$$T = x^8 + 5x^9 + \ldots + tx^{n+4} + t'x^{n+5} + t''x^{n+6} + \text{etc.}$$
etc. etc.

His conſtitutis propoſitum mihi eſt primo in valores litterarum minuſcularum p, q, r, s, etc. earumque derivatarum p', q', r', s' etc. p'', q'', r'', s'', etc. inquirere, quo facto etiam valores litterarum majuſcularum P, Q, R, S, etc. indagabo.

Investigatio litterarum p, q, r, s, etc.

§. 7. Cum p ſit coëfficiens poteſtatis x^n ex evolutione formulae $(1 + x + xx)^n$ oriundae, iſtam formulam hoc modo repraesentemus: $(x(1+x)+1)^n$, pro cujus evolutione utamur ſignandi modo jam aliquoties a me uſitato, quo coëfficientes ſimilis poteſtatis binomialis per hos characteres deſignare ſoleo: $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$, etc. ita ut ſit

$$\binom{n}{1} = n$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$
$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\binom{n}{5} =$$

$$\left(\tfrac{n}{5}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\left(\tfrac{n}{\lambda}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\ldots\lambda}$$

Circa quos characteres hic annotasse juvabit, in genere semper esse $\left(\tfrac{n}{\lambda}\right) = \left(\tfrac{n}{n-\lambda}\right)$, quandoquidem hi coëfficientes retro eundem ordinem servant, et quia coëfficientes extremi sunt unitas, erit $\left(\tfrac{n}{0}\right) = \left(\tfrac{n}{n}\right) = 1$. Deinde, quia ex lege progressionis tam omnes termini primum antecedentes quam termini ultimum sequentes evanescunt, erit ut sequitur:

$$\left(\tfrac{n}{-1}\right) = \left(\tfrac{n}{n+1}\right) = 0$$
$$\left(\tfrac{n}{-2}\right) = \left(\tfrac{n}{n+2}\right) = 0$$
$$\left(\tfrac{n}{-3}\right) = \left(\tfrac{n}{n+3}\right) = 0$$
etc.

§. 8. His praemissis formula nostra $(x(1+x)+1)^n$, more solito tanquam binomium evoluta, dabit hanc seriem:

$$x^n(1+x)^n + \left(\tfrac{n}{1}\right)x^{n-1}(1+x)^{n-1} + \left(\tfrac{n}{2}\right)x^{n-2}(1+x)^{n-2} + \left(\tfrac{n}{3}\right)x^{n-3}(1+x)^{n-3} + \text{etc.}$$

ubi notetur esse in genere:

$$(1+x)^\lambda = 1 + \left(\tfrac{\lambda}{1}\right)x + \left(\tfrac{\lambda}{2}\right)x^2 + \left(\tfrac{\lambda}{3}\right)x^3 + \text{etc.}$$

Ex singulis igitur membris illius formae expositae depromi debent termini potestatem x^n continentes, quippe qui conjunctim sumti component terminum medium px^n.

§. 9. Primum autem membrum $x^n(1+x)^n$ tantum terminum hujus formae praebet x^n. Ex membro autem secundo hanc formam habebit terminus secundus, qui est $\left(\tfrac{n}{1}\right)\left(\tfrac{n-1}{1}\right)x^n$. Ex tertio membro potestas x^n oritur ex termino

no tertio, qui eſt $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}x^n$. Simili modo ex membro quarto deducitur $\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}x^n$. Ex quinto oritur $\binom{n}{4}\binom{n-4}{4}x^n$ et ita porro. Hinc igitur verus valor litterae p ita colligitur

$$p = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{4} + \text{etc.}$$

§. 10. Simili modo ex eadem evolutione colligere licet coëfficientes poteſtatis x^{n+1}, qui junctim ſumti dabunt valorem litterae q. Talis autem poteſtas ex primo membro orta erit $\binom{n}{1}x^{n+1}$. Ex ſecundo membro oritur $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}x^{n+1}$; ex tertio membro $\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}x^{n+1}$; ex quarto $\binom{n}{3}\binom{n-3}{4}x^{n+1}$; et ita porro, quocirca verus valor litterae q hoc modo exprimetur:

$$q = \binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{3} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{4} + \text{etc.}$$

ubi ob analogiam primus terminus $\binom{n}{1}$ ita repraesentatus eſt intelligendus $\binom{n}{0}\binom{n}{1}$. Sic enim, cum quilibet terminus duobus conſtet factoribus, priores factores conſtituunt hanc ſeriem: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}$, etc. poſteriores vero iſtam $\binom{n}{1}, \binom{n-1}{2}, \binom{n-2}{3}, \binom{n-3}{4}$, etc.

§. 11. Pari modo ex poteſtatibus x^{n+2}, quae ex ſingulis membris deducuntur, formabitur terminus rx^{n+2}; at vero primum membrum pro hac poteſtate praebet $1.\binom{n}{2}x^{n+2}$, ſive analogiae gratia $\binom{n}{0}\binom{n}{2}x^{n+2}$. Ex membro ſecundo oritur eadem poteſtas $\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}x^{n+2}$; ex tertio membro $\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}x^{n+2}$; ex quarto $\binom{n}{3}\binom{n-3}{5}x^{n+2}$ et ita porro; ex quibus ergo collectis nanciscimur valorem litterae r hoc modo expreſſum:

$$r = \binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{3} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{4} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{5} + \text{etc.}$$

§. 12.

§. 12. Superfluum foret eandem deductionem pro litteris ſequentibus apponere, quandoquidem jam ſatis perſpicuum eſt fore:

$$s = \binom{n}{0}\binom{n}{3} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{4} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{5} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{6} + \text{etc.}$$

$$t = \binom{n}{0}\binom{n}{4} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{5} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{6} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{7} + \text{etc.}$$

$$u = \binom{u}{0}\binom{n}{5} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{6} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{7} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{8} + \text{etc.}$$

etc. etc.

atque in genere ſi poteſtati $x^{n+\lambda}$ tribuamus litteram z, erit

$$z = \binom{n}{3}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{\lambda+2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{\lambda+3} + \text{etc.}$$

§. 13. Manifeſtum hic eſt omnes terminos harum ſerierum contineri in hac forma generali: $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$, quam obſervo ſemper huic eſse aequalem; $\binom{n}{\beta}\binom{n-\beta}{\alpha}$, ita ut litterae α et β permutationem patiantur. Cum enim facta evolutione fit:

$$\frac{n}{\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\ldots\alpha},$$

et $$\frac{n-\alpha}{2} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)(n-\alpha-2)\ldots\ldots(n-\alpha-\beta+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\beta}.$$

facta multiplicatione erit

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-\alpha-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta}$$

ubi permutabilitas litterarum α et β in oculos incurrit.

§. 14. Quodſi jam ſeries ante inventae hoc modo immutentur, prima quidem pro p inventa nullam mutationem patitur, reliquae vero ſequenti modo referentur:

$$q = \binom{n}{1}\binom{n-1}{0} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{1} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{2} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{3} + \text{etc.}$$

$$r = \binom{n}{2}\binom{n-2}{0} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{1} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{3} + \binom{n}{5}\binom{n-5}{4} + \text{etc.}$$

$$s = \binom{n}{3}\binom{n-3}{0} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{1} + \binom{n}{5}\binom{n-5}{4} + \binom{n}{6}\binom{n-6}{5} + \text{etc.}$$

- - - - - - - - - - - - -

$$z = \binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{0} + \binom{n}{\lambda+1}\binom{n-\lambda-1}{1} + \binom{n}{\lambda+2}\binom{n-\lambda-2}{2} + \text{etc.}$$

§. 15.

§. 15. Praeterea vero maxime memorabilis eſt haec conversio, qua eſt $\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{n}{\alpha+\beta}\right)$. Cum enim ſit

$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\ldots(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha}$, et

$\left(\frac{n}{\alpha+\beta}\right) = \frac{n(n-1)n-2)\ldots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha\times(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\beta)}$, ſive

$\left(\frac{n}{\alpha+\beta}\right) = \frac{n(n-1)n(n-2)\ldots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\beta\cdot(\beta+1)\ldots(\beta+\alpha)}$, productum erit

$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{n}{\alpha+\beta}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\beta\times 1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha}$,

in quam eandem formam reſolvitur formula $\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right)$.

§. 16. Per hanc igitur transformationem ſuperiores ſeries ſequenti modo exprimi poterunt:

$p = 1 + \left(\frac{2}{0}\right)\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{n}{6}\right) + \left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{n}{8}\right) + \text{etc.}$

$q = \left(\frac{1}{0}\right)\left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{n}{5}\right) + \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{n}{7}\right) + \text{etc.}$

$q = \left(\frac{2}{0}\right)\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{n}{6}\right) + \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{n}{8}\right) + \text{etc.}$

$s = \left(\frac{3}{0}\right)\left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{n}{5}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{n}{7}\right) + \left(\frac{9}{3}\right)\left(\frac{n}{9}\right) + \text{etc.}$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

$z = \left(\frac{\lambda}{0}\right)\left(\frac{n}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda+2}{1}\right)\left(\frac{n}{\lambda+2}\right)\left(\frac{\lambda+4}{2}\right)\left(\frac{n}{\lambda+4}\right) + \left(\frac{\lambda+6}{3}\right)\left(\frac{n}{\lambda+6}\right) + \text{etc.}$

§. 17. Notari adhuc meretur alia transformatio, quae ad calculum numericum imprimis eſt accommodata. Cum enim ex prima forma ſit $z = \left(\frac{n}{\lambda}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right) + \text{etc.}$ quilibet terminus hujus ſeriei eſt $\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\lambda+\alpha}\right)$, qui dicatur $= \Pi$, eritque facta evolutione:

$\Pi = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)\ldots(n-2\alpha-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\lambda+\alpha}$. Quodſi jam hic loco α ſcribamus $\alpha+1$, ut oriatur terminus ſequens, qui ergo erit $= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\alpha+1)\times 1\cdot 2\cdot 3(\lambda+\alpha+1)}$,

hic per illum divisus praebet quotum
$\frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$. Hinc ergo erit terminus sequens
$\Pi \cdot \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$.

§. 18. Quodsi ergo in hac serie, more Newtoniano, littera Π denotet quemlibet terminum praecedentem, sequens semper erit $\Pi \cdot \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$; unde cum primus terminus sit $(\frac{n}{\lambda})$, ubi est $\alpha = 0$, si hic designetur per Π, erit terminus secundus
$= \Pi \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)}$, qui si denuo vocetur Π, erit terminus tertius
$= \Pi \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)}$, qui si denuo vocetur Π, erit termin. quartus
$= \Pi \frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)}$, et ita porro. Hoc modo nostra series pro z hanc induet formam:
$z = (\frac{n}{\lambda}) + \Pi \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1(\lambda+1)} + \Pi \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)} + \Pi \frac{(n-\lambda-4(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)} + \text{etc.}$
ubi scilicet perpetuo Π designat terminum praecedentem.

§. 19. Hinc igitur si loco λ successive scribamus valores 1, 2, 3, 4 etc. pro nostris litteris p, q, r, s, etc. sequentes nanciscemur series:
$p = 1 + \Pi \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} + \Pi \frac{(n-2)n-3)}{2 \cdot 2} + \Pi \frac{(n-4)(n-5)}{3 \cdot 3} + \Pi \frac{(n-6)(n-7)}{4 \cdot 4} + \text{etc.}$
$q = (\frac{n}{1}) + \Pi \frac{(n-1)n-2)}{1 \cdot 2} + \Pi \frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3} + \Pi \frac{(n-5)\,)n-6)}{3 \cdot 4} + \Pi \frac{(n-7)(n-8)}{4 \cdot 5} + \text{etc.}$
$r = (\frac{n}{2}) + \Pi \frac{(n-)(n-3)}{1 \cdot 3} + \Pi \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4} + \Pi \frac{(n-6)(n-7)}{3 \cdot 5} + \Pi \frac{(n-8)(n-9)}{4 \cdot 6} + \text{etc.}$
$s = (\frac{n}{3}) + \Pi \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 4} + \Pi \frac{(n-5)(n-6)}{2 \cdot 5} + \Pi \frac{(n-7)(n-8)}{3 \cdot 6} + \Pi \frac{(n-9)(n-10)}{4 \cdot 7} + \text{etc.}$
etc. etc.

§. 20. Istae formae ad calculum numericum imprimis sunt accommodatae, quod pro sola littera p ostendisse sufficiet. Quaeramus scilicet exempli gratia valorem ipsius p pro

pro casu $n = 6$, ac singulae ejus partes sequenti modo reperientur:

$$\begin{aligned} \text{I.} &= . &&= 1 \\ \text{II.} &= 1 . \tfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 1} &&= 30 \\ \text{III.} &= 30 . \tfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} &&= 90 \\ \text{IV.} &= 90 . \tfrac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} &&= 20 \end{aligned}$$

ergo Summa $= p = 141$

§. 21. Simili modo quaeramus valorem ipsius p pro casu $n = 12$, cujus singulae partes sequenti modo colligentur:

$$\begin{aligned} \text{I.} &= 1 . . . . &&= 1 \\ \text{II.} &= 1 . \tfrac{12 \cdot 11}{1 \cdot 1} &&= 132 \\ \text{III.} &= 132 . \tfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 2} &&= 2970 \\ \text{IV} &= 2970 . \tfrac{8 \cdot 7}{3 \cdot 3} &&= 18480 \\ \text{V} &= 18480 . \tfrac{4 \cdot 5}{4 \cdot 4} &&= 34650 \\ \text{VI} &= 34650 . \tfrac{4 \cdot 3}{5 \cdot 5} &&= 16632 \\ \text{VII} &= 16632 . \tfrac{2 \cdot 1}{6 \cdot 6} &&= 924 \end{aligned}$$

ergo Summa $= p = 73789$.

§. 22. Mox autem trademus modum multo expeditiorem singulos terminos harum serierum ex binis praecedentibus eliciendi, unde facili calculo omnes valores pro litteris p, q, r, etc. pro singulis exponentibus n exhiberi poterunt, ficque omnes istos valores, quousque libuerit, continuare licebit. Hanc autem relationem primo seorsim pro numeris sub littera p contentis instituamus.

Investigatio relationis inter ternos valores consecutivos p, p', p''.

§. 23. Cum fit $p = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) + \text{etc.}$ hujus ſeriei conſideremus terminum quemcunque $\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)$, quem vocemus $= \Pi$, ita ut facta evolutione ſit $\Pi = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots n-2\alpha+1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha \times 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\alpha}$; terminum autem, qui hunc ſequitur, deſignemus per Φ, ut ſit $\Phi = \left(\frac{n}{\alpha+1}\right)\left(\frac{n-\alpha-1}{\alpha+1}\right)$, ideoque facta evolutione $\Phi = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-2\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\alpha+1) \times 1\cdot 2\cdot 3\ldots(\alpha+1)}$ hincque ergo habebitur:

$$\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha+1)} \text{ ideoque } \Pi = \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1)}.$$

§. 24. Jam pro valoribus ſequentibus p' et p'' deſignemus valores ipſius Φ reſpondentes per Φ' et Φ'', qui, quoniam oriuntur ex valore Φ, ſi loco n ſcribatur $n+1$ et $n+2$, erit facta evolutione $\Phi' = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\alpha+1) \times 1\cdot 2\cdot 3\ldots(\alpha-1)}$, unde patet fore $\Phi' : \Phi = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}$, hincque $\Phi' = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}\Phi$. Simili modo, ſi hic quoque loco n ſcribamus $n+1$, habebimus

$$\Phi'' = \frac{n-2}{n-2\alpha}\Phi', \text{ ſive } \Phi'' = \frac{(n-1)(n+2)\Phi}{(n-2\alpha-1)(n-\alpha)}.$$

§. 25. Hinc jam formemus hanc expreſſionem: $A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi''$, cujus ergo valor per ipſam litteram Φ ita exprimetur: $\Phi\left(A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)}\right)$, ubi litteras A, B, C ita definire conemur, ut forma iſta aequalis evadat ipſi termino praecedenti Π. Evidens autem eſt, iſtas litteras, ut ad omnes terminos pariter pertinere queant, litteram α involvere

vere non debere. Subſtituto igitur loco Π valore ante dato per Φ expresso, nanciscemur ſequentem aequationem per Ψ divisam:

$$A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)} = \frac{\alpha}{(n-2\alpha-1)} \frac{(\alpha-1)}{(n-2\alpha)},$$

quae a fractionibus liberata evadit

$$A(n-2\alpha-1)(n-2\alpha) + B(n-2\alpha) + C = (\alpha+1)(\alpha+1).$$

§. 26. Cum in hac aequatione littera α ad ſecundam dimenſionem aſcendat, ternae litterae A, B. C praeciſe ſufficient, ut ex hac aequatione determinari queant. Primo igitur coaequemus utrinque terminos quadratum $\alpha\alpha$ involventes, unde orietur iſta aequatio: $4A\alpha\alpha = \alpha\alpha$, ideoque $A = \frac{1}{4}$. Eodem modo coaequemus terminos ipsam litteram α involventes, unde perducimur ad hanc aequationem:
$2\alpha(1-2n)A - 2\alpha.B = 2\alpha$, unde fit $B = -\frac{(2n-1)}{4} - 1 = -\frac{2n-3}{4}$.
Denique termini ab α immunes dant hanc aequationem:
$(nn-n)A + nB + C = 1$, unde reperitur $C = \frac{(n+2)^2}{4}$.

§. 27. His igitur valoribus inventis, pro ſingulis terminis ſemper erit $A\Phi + \frac{B}{n-1}.\Phi' + \frac{C}{(n-2)(n-1)}\Phi'' = \Pi$. Quod ſi ergo hinc computemus hanc formulam:
$A.p + \frac{B}{n-1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p''$, ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens feriei p qui eſt $= 0$; ex ſecundis autem terminis pro Φ assumtis orietur terminus primus qui eſt 1; ex terminis autem tertiis conficitur terminus ſecundus, qui eſt $\left(\frac{n}{1}\ \frac{n-1}{1}\right)$; ex terminis quartis pro Φ assumtis conficitur tertius qui eſt $\left(\frac{n}{2}\ \frac{(n-2)}{2}\right)$ et ita porro; ſicque omnes tres ſeries hoc modo collectae, producent hanc seriem:
$0 + 1 + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{-2}{2}\right) +$ etc. quae eſt ipsa ſeries pro p data

data. Hinc habebimus inter ternas litteras p, p', p'' hanc aequationem:

$$A \cdot p + \frac{B}{n+1} p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)} p'' = p.$$

§. 28. Subſtituamus nunc loco litterarum A, B, C valores modo inventos, et noſtra aequatio inter has ternas litras erit $\frac{1}{4} p - \frac{(2n+3)}{4(n+1)} p' + \frac{n+2}{4(n+1)} p'' = p$, quae reducitur ad hanc: $\frac{n+2}{n+1} p'' - \frac{(2n+3)}{n+1} p' = 3p$, unde fit $p'' = p' + (\frac{n+1}{n+2})(p' + 3p)$.

§. 29. Hinc igitur facile pro ſingulis valoribus exponentis n omnes numeri littera p deſignati definiri poterunt, dum quilibet ex duobus praecedentibus componitur. Ita ſumto $n = 0$, erit $p = 1$ et $p' = 1$, ideoque tertius $p'' = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3 \cdot 1)$. Sumto $n = 1$, erit $p = 1$, $p' = 3$, ideoque terminus quartus $p'' = 3 + \frac{2}{3}(3 + 3 \cdot 1) = 7$. Sumto $n = 2$, ob $p = 3$ et $p' = 7$, erit terminus quintus $p'' = 7 + \frac{3}{4}(7 + 3 \cdot 3) = 19$. Si ſumatur $n = 3$, ob $p = 7$ et $p' = 19$, erit terminus ſextus $p'' = 19 + \frac{4}{5}(19 + 3 \cdot 7) = 51$.

§. 30. Si hoc modo ulterius progrediamur, poterimus hinc progressionem continuare, quousque libuerit, ope formae $p' + \frac{1}{n+2}(p' + 3p) = p''$, quae nobis ſuppeditat ſequentes determinationes:

$$51 + \tfrac{5}{6}(51 + 3 \cdot 19) = 141$$
$$141 + \tfrac{6}{7}(141 + 3 \cdot 51) = 393$$
$$393 + \tfrac{7}{8}(393 + 3 \cdot 141) = 1107$$
$$1107 + \tfrac{8}{9}(1107 + 3 \cdot 393) = 3139$$
$$3139 + \tfrac{9}{10}(3139 + 3 \cdot 1107) = 8953$$
$$8953 + \tfrac{10}{11}(8953 + 3 \cdot 3139) = 25653$$
$$25653 + \tfrac{11}{12}(25653 + 3 \cdot 8953) = 73789.$$

etc.

§. 31.

§. 31. Simili methodo etiam relatio inter ternos terminos consecutivos pro sequentibus litteris q, r, s, etc. investigari poterit, quem laborem quo generaliter expediamus, inquiramus in relationem, inter ternos terminos z, z' et z'', quibus respondere assumsimus litteram λ.

Investigatio Relationis inter ternos terminos consecutivos z, z', z''.

§. 32. Cum sit $z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{\lambda+2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{\lambda+3} + \text{etc.}$ hujus seriei consideremus terminum quemcunque $\Pi = \binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha}$, cujus valor evolutus est $\Pi = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots(\lambda+\alpha)}$. Terminum jam hunc sequentem $\binom{n}{\alpha+1}\binom{n-\alpha-1}{\lambda+\alpha+1} = \Phi$ evolvamus, unde fit $\Phi = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1.2.3\ldots(\alpha+1) \times 1.2.3\ldots(\lambda+\alpha+1)}$. Hinc ergo colligimus $\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$, ideoque $\Pi = \frac{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}$.

§. 33. Jam pro valoribus sequentibus z' et z'' designemus valores ipsi Φ respondentes per Φ' et Φ'', qui quoniam oriuntur ex valore Φ, si loco n scribatur $(n+1)$ et $(n+2)$, erit facta evolutione $\Phi' = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots\ldots(n-2\alpha-\lambda)}{1.2.3\ldots(\alpha+1) \times 1\ldots(\alpha+\lambda+1)}$, unde patet fore $\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{n+1}{n-2\alpha-\lambda-1}$, hincque $\Phi' = \frac{(n+1)\Phi}{n-2\alpha-\lambda-1}$. Eodemque modo erit $\Phi'' = \frac{n+2}{n-2\alpha-\lambda}\Phi' = \frac{(n+2)(n+1)\Phi}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}$.

§. 34. Hinc prorsus ut supra formemus hanc expressionem: $A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi''$, cujus valor per Φ ita exprimitur: $\Phi\left(A + \frac{B}{n-2\alpha-\lambda-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}\right)$, ubi iterum litteras A, B, C ita definiri oportet, ut formula aequalis evadat ipsi termino praecedenti Π. Substituto igitur loco Π valore

ante

ante per Φ expresso nanciſcemur ſequentem aequationem a fractionibus jam liberatam:

$$A(n - 2\alpha - \lambda - 1)(n - 2\alpha - \lambda) + B(n - 2\alpha - \lambda) + C = (\alpha + 1)(\alpha + \lambda + 1).$$

§. 35. Facta igitur evolutione et coaequatis primo utrinque terminis $\alpha\alpha$ involventibus prodit haec aequatio pro determinatione litterae A: $4\alpha\alpha A = \alpha\alpha$, ideoque $A = \frac{1}{4}$. Eodem modo ſi coaequentur termini ſimplicem litteram α involventes, perducimur ad ſequentem aequationem: $(4\alpha\lambda - 4n\alpha + 2\alpha)A - 2\alpha B = (\lambda + 2)\alpha$, unde colligitur $B = -\frac{2n-3}{4}$. Denique coaequatis terminis ab α liberis prodit aequatio:

$$\frac{nn - 2n\lambda - n + \lambda\lambda + \lambda}{4} - \frac{(n-\lambda)(2n+3)}{4} + C = \lambda + 1, \text{ unde fit}$$

$$C = \frac{(n+2)^2}{4} - \frac{\lambda\lambda}{4}.$$

§. 36. His igitur valoribus inventis, pro ſingulis terminis ſemper erit $A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'' = \Pi$. Quod ſi igitur hinc computemus iſtam formulam: $Az + \frac{B}{n+1}z' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}z''$, ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens ſeriei z, qui eſt 0. Ex ſecundis autem terminis pro Φ assumtis orietur terminus primus $(\frac{n}{\lambda})'$; ex tertiis terminis conficitur terminus ſecundus $(\frac{n}{1})(\frac{n-1}{\lambda+1})$; ex quartis terminis pro Φ assumtis conficitur tertius qui eſt $(\frac{n}{2})(\frac{n-2}{\lambda+2})$, et ita porro; quibus collectis oritur ipſa ſeries pro z data

$$z = (\tfrac{n}{\lambda}) + (\tfrac{n}{1})(\tfrac{n-1}{\lambda+1}) + (\tfrac{n}{2})(\tfrac{n-2}{\lambda+2}) + (\tfrac{n}{3})(\tfrac{n-3}{\lambda+3}) + \text{etc.}$$

Relatio igitur inter z, z', z'' erit

$$Az + \frac{B}{n+1}z' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}z'' = z.$$

§. 37.

§. 37. Subſtituamus nunc loco litterarum A, B, C valores modo inventos, et aequatio inter has ternas litteras erit:

$$\tfrac{1}{4}z - \tfrac{(2n+3)}{4(n+1)}z' + \left(\tfrac{(n+2)^2-\lambda\lambda}{4(n+2)(n+1)}\right)z'' = z,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\tfrac{((n+2)^2-\lambda\lambda)}{(n+2)(n+1)}z'' = \tfrac{2n+3}{n+1}z' + 3z, \text{ unde colligitur}$$

$$z'' = \tfrac{n+2}{(n+2)^2-\lambda\lambda}((2n+3)z' + 3(n+1)z).$$

§. 38. Tribuamus nunc litterae λ ſucceſſive valores 0, 1, 2, 3, 4, etc. ac reperiemus ſequentes relationes pro ſingulis litteris:

$$\tfrac{(n+2)^2-0^2}{(n+2)(n+1)}p'' = \tfrac{2n+3}{n+1}p' + 3p$$
$$\tfrac{(n+2)^2-1^2}{(n+2)(n+1)}q'' = \tfrac{2n+3}{n+1}q' + 3q$$
$$\tfrac{(n+2)^2-2^2}{(n+2)(n+1)}r'' = \tfrac{2n+3}{n+1}r' + 3r$$
$$\tfrac{(n+2)^2-3^2}{(n+2)(n+1)}s'' = \tfrac{2n+3}{n+1}s' + 3s$$
etc. etc.

§. 39. Cum igitur pro littera q habeamus hanc aequationem: $q'' = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}((2n+3)q' + 3(n+1)q$, casu $n=0$ erit $q=0$ et $q'=1$, unde fit $q'' = \frac{2}{3}(3.1+3.0) = 2$. Nunc pro $n=1$, ob $q=1$ et $q'=2$, erit $q'' = \frac{3}{2.4}(5.2+6.1) = 6$. Tum pro casu $n=2$, ob $q=2$ et $q'=6$, erit $q'' = \frac{4}{3.5}(7.6+9.2) = 16$. Jam ſumto $n=3$, ob $q=6$ et $q'=16$, erit $q'' = \frac{5}{4.6}(9.16+12.6) = 45$. At casu $n=4$, ob $q=16$ et $q'=45$, erit $q'' = \frac{6}{5.7}(11.45+15.16) = 126$.

§. 40. Hic autem calculus multo laboriosior et taediosior eſt quam praecedens pro valoribus litterae p expoſitus. Verum alia methodus multo facilior inde derivari poterit, qua omnes litteras q, r, s per ſolam litteram p cum suis

derivatis p', p'' determinare licebit; tum enim poſtquam ſeries numerorum p jam ſatis longe fuerit computata, inde etiam valores litterarum q, r, s, etc. multo leviori labore colligi poterunt, id quod in ſequenti articulo oſtendemus:

Determinatio litterarum q, r, s, t, etc. per ſolam primam p cum suis derivatis.

§. 41. Poſito brevitatis gratia noſtro trinomio $1+x+xx=X$, ejus binas poteſtates X^n et X^{n+1} evolutas ita disponamus, ut pares poteſtates ipſius x ſibi invicem ſubscriptae appareant, hoc modo:

$X^n = 1 + nx + \ldots + qx^{n-1} + px^n + qx^{n+1} + rx^{n+2} + sx^{n+3} + \text{etc.}$
$X^{n+1} = 1 + (n+1)x \ldots + r'x^{n-1} + qx^n + p'x^{n+1} + q'x^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.}$

quo facto ſupra jam notavimus quemlibet coëfficientem inferioris ſeriei aequari ſuperiori cum binis praecedentibus.

§. 42. Per hanc igitur legem ſequentes nanciscemur aequalitates:

$p' = q + p + q = 2q + p$
$q' = r + q + p$
$r' = s + r + q$
etc.

unde colligimus ſequentes determinationes

$q = \frac{p'-p}{2}$; $r = q' - q - p$; $s' = r' - r - q$; $t' = s' - s - r$; etc.

§. 43. Manifeſtum eſt hic formulam $p' - p$ exprimere incrementum quantitatis p, dum exponens n unitate augetur, quod cum per Δp exprimi ſoleat, aequalitates inventae ſequenti modo ſuccinctius exhiberi poterunt:

$q = \frac{1}{2}\Delta p$, ſive $2q = \Delta p$; $2r = 2\Delta q - 2p$: $2s = 2\Delta r - 2q$; etc.

§. 44.

§. 44. Charactere autem hoc differentiali Δ in uſum vocato, cum ſit $2q = \Delta p$, erit $2\Delta q = \Delta\Delta p$ ideoque
$2r = \Delta\Delta p - 2p$, hincque $2\Delta r = \Delta^3 p - 2\Delta p$, ex quo porro fit $2s = \Delta^3 p - 3\Delta p$ ideoque
$2\Delta s = \Delta^4 p - 3\Delta\Delta p$, ergo $2t = \Delta^4 p - 4\Delta\Delta p + 2p$, ideoque
$2\Delta t = \Delta^5 p - 4\Delta^3 p + 2\Delta p$. Hinc porro fit
$2u = \Delta^5 p - 5\Delta^3 p + 5\Delta p$, ideoque
$2\Delta u = \Delta^6 p - 5\Delta^4 p + 5\Delta\Delta p$, unde deducitur
$2v = \Delta^6 p - 6\Delta^4 p + 9\Delta\Delta p + 2p$, et ita porro.

§. 45. Quod ſi hos coëfficientes numericos attentius conſideremus, lex progressionis convenire deprehenditur cum ſerie Geometris ſatis nota, unde pro valore z, cui ordinis index poſitus eſt λ, obtinebimus ſequentem formam:

$$2z = \Delta^\lambda p - \lambda\Delta^{\lambda-2}p + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1.2}\Delta^{\lambda-4}p - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.2.3}\Delta^{\lambda-6}p + \frac{\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1.2.3.4}\Delta^{\lambda-8}p - \frac{\lambda(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda-8)(\lambda-9)}{1.2.3.4.5}\Delta^{\lambda-10}p + \text{etc.}$$

quam ſeriem eo usque tantum continuari oportet, quamdiu indices ipſius Δ non evadunt negativi. Ita ſi ſumamus $\lambda = 6$, quo casu fit $z = v$, ex hac lege generali utique prodit
$2v = \Delta^6 p - 6\Delta^4 p + 9\Delta^2 p - 2p$.

§. 46. Quo indoles hujus ſeriei clarius perſpiciatur, meminisse oportet, hanc formam $\frac{(x+\sqrt{xx-4})^n}{2^n} + \frac{(x-\sqrt{xx-4})^n}{2^n}$ in ſequentem ſeriem reſolvi:

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo noſtro ſcopo jam eſt ſatisfactum, cum omnes litteras q, r, s, t, etc. per ſolam primam p ſuasque derivatas p', p'', p''', etc. expressas elicuerimus.

Determinatio quantitatis p per formulam finitam integralem.

§. 47. Cum fit per tertiam formam supra expositam $p = 1 + \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} + \binom{6}{3}\binom{n}{6} + \text{etc.}$ quilibet terminus in genere erit $\binom{2\alpha}{\alpha}\binom{n}{2\alpha}$, quem excipit iste sequens: $\binom{2\alpha+2}{\alpha+1}\binom{n}{2\alpha+2}$ Cum igitur facta evolutione fit

$$\binom{2\alpha}{\alpha} = \frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\ldots\ldots(\alpha+1)}{1.2.3\ldots\ldots\alpha},$$ similique modo

$$\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)2\alpha\ldots\ldots(\alpha+2)}{1.2.3\ldots(\alpha+1)},$$

haec posterior forma per priorem divisa dat quotum

$$\frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha+1},$$ sicque erit $\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{4\alpha+2}{\alpha+1}\binom{2\alpha}{\alpha}$.

§. 48. Hac ergo reductione adhibita, sumto $\alpha = 1$ erit $\binom{4}{2} = \frac{6}{2}\binom{2}{1}$; sumto $\alpha = 2$ erit $\binom{6}{3} = \frac{10}{3}\binom{4}{2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1}$; si $\alpha = 3$ fit $\binom{8}{4} = \frac{14}{4}\binom{6}{3} = \frac{14}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1}$; tum si $\alpha = 4$ fiet $\binom{10}{5} = \frac{18}{5}\binom{8}{4} = \frac{18}{5}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1}$, et ita porro. His igitur valoribus introductis erit per factores ordinarios numericos

$$p = 1 + \frac{2}{1}\binom{n}{2} + \frac{2.6}{1.2}\binom{n}{4} + \frac{2.6.10}{1.2.3}\binom{n}{6} + \frac{2.6.10.14}{1.2.3.4}\binom{n}{8} + \frac{2\ldots\ldots18}{1\ldots\ldots5}\binom{n}{10} + \text{etc.}$$

§. 49. Nunc igitur videamus, quomodo formam finitam integralem investigari oporteat, cujus integrale intra datos terminos inclusum ad hanc ipsam seriem perducat. Hunc in finem contemplari conveniet istam formulam $(1+x)^n$, quippe cujus evolutio praebet hanc seriem: $1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}xx + \binom{n}{3}x^3 + \text{etc.}$, cujus termini alterni jam continent characteres nostros litterae n.

§. 50. Hanc igitur seriem in duas partes discerpamus, secundum terminos alternos, ac ponamus

$M = 1 + \binom{n}{2}xx + \binom{n}{4}x^4 + \binom{n}{6}x^6 + \text{etc.}$

$N = \binom{n}{1}x + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 + \binom{n}{7}x^7 + \text{etc.}$

ita

ita ut fit $(1+x)^n = M + N$. Nunc autem inquiramus, quomodo seriem priorem M per operationes analyticas tractari oporteat, ut ipsa series proposita, seu valor ipsius p, inde exoriatur.

§. 41. Ad hoc efficiendum ducamus quantitatem M in certum quoddam differentiale ∂v cujuspiam functionis ipsius x, atque sequentes integrationes ita determinemus, ut intra certos terminos, veluti ab $x = a$ usque ad $x = b$, includantur, quas conditiones ita comparatas esse oportet, ut sequentibus conditionibus satisfiat:

1) $\int xx\partial v = \frac{2}{1}v$
2) $\int x^4\partial v = \frac{2\cdot 6}{1\cdot 2}v$
3) $\int x^6\partial v = \frac{2\cdot 6\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}v$
4) $\int x^8\partial v = \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v$

etc.

hoc enim modo integrale $\int M\partial v$ producet hanc seriem:

$$v + \frac{2}{1}\left(\frac{n}{2}\right)v + \frac{2\cdot 6}{1\cdot 2}\left(\frac{n}{4}\right)v + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{n}{6}\right)v + \text{etc.}$$

ita ut hoc modo id quod quaerimus nanciscamur $p = \int\frac{M\partial v}{v}$

§. 52. Formularum igitur integralium, quas hic exposuimus, quaelibet ita a praecedente pendet, ut fit

$\int xx\partial v = \frac{2}{1}\int\partial v$
$\int x^4\partial v = \frac{6}{3}\int xx\,\partial v$
$\int x^6\partial v = \frac{10}{4}\int x^4\partial v$
$\int x^8\partial v = \frac{14}{5}\int x^6\partial v$

etc.

sicque in genere effici debet ut fiat $\int x^{2m}\partial v = \frac{4m-2}{m}\int x^{2m-2}\,\partial v$. Haec scilicet reductio locum habere debet, postquam integralia

gralia intra praescriptos terminos fuerint assumta, scilicet ab $x = a$ usque ad $x = b$, qui quidem termini nondum sunt cogniti, sed ad ipsam conditionem praescriptam accommodari debent.

§. 53. Cum igitur pro his terminis integrationis esse debeat
$$m\int x^{2m}\partial v = (4m-2)\int x^{2m-2}\partial v,$$
ponamus esse generatim
$$m\int x^{2m}\partial v = (4m-2)\int x^{2m-2}\partial v + \Pi x^{2m-1},$$
ubi scilicet Π ejusmodi sit functio, ut pars subnexa x^{2m-1} utroque termino tam $x = a$ quam $x = b$ in nihilum abeat. Haec jam aequatio differentiata et per x^{2m-1} divisa dat
$$mxx\partial v = (4m-2)\partial v + (3m-1)\Pi\partial x + x\partial\Pi,$$
quae aequatio subsistere debet pro omnibus numeris m.

§. 54. Hinc igitur ista aequatio in duas discerpi debebit, quarum altera contineat solos terminos littera m affectos, altera vero reliquos, quae ergo duae aequationes erunt
$$xx\partial v = 4\partial v + 2\Pi\partial x \quad \text{et} \quad 0 = -u\partial v - \Pi\partial x - x\partial\Pi.$$
Ex priori fit $\partial v = \frac{2\Pi\partial x}{xx-4}$; ex altera vero fit $\partial v = \frac{x\partial\Pi - \Pi\partial x}{2}$, qui ambo valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:
$$4\Pi\partial x = (xx-4)(x\partial\Pi - \Pi\partial x) = x^3\partial\Pi - xx\Pi\partial x - 4x\partial\Pi + 4\Pi\partial x$$
hincque colligitur $\frac{\partial\Pi}{\Pi} = \frac{x\partial x}{xx-4}$, unde integrando fit $l\Pi = l\sqrt{xx-4}$ ideoque $\Pi = C\sqrt{xx-4}$, vel etiam $\Pi = C\sqrt{4-xx}$, quo valore invento assequimur nostrum differentiale assumtum $\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{4-xx}}$, unde fit $v = 2CA\sin\frac{x}{2}$.

§. 55. Considerabimus nunc formulam sufficiam $\Pi x^{2n-1} = Cx^{2m-1}\sqrt{4-xx}$, quam deprehendimus triplici modo in nihilum abire posse: primo scilicet quando $x = 0$, casu excepto quo $m = 0$; secundo, casu quo $x = 2$; ac tertio

tertio, casu quo $x = -2$, ex quibus ergo binos terminos illos a et b desumi oportet. Ita autem hos binos terminos eligi conveniet, ut etiam altera integrationis pars $\int N \partial v$ commode exprimatur. Quia enim posuimus $(1+x)^n = M+N$, etiam ad integrale $\int N \partial v$ est respiciendum, quod si penitus evanesceret, pro terminis integrationis sine dubio id esset commodissimum, tum enim foret $\int (M+N)\partial v$, sive $\int \partial v\,(1+x)^n = \int M\,\partial v$, consequenter haberemus $p = \frac{\int M \partial v}{v}$.

§. 56. Supra autem posuimus

$N = \binom{n}{1} x + \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{5} x^5 + \binom{n}{7} x^7 + \text{etc.}$

unde conficitur $\int N \partial v = \frac{n}{1}\int x \partial v + \frac{n}{3}\int x^3 \partial v + \binom{n}{5}\int x^5 \partial v + \text{etc.}$ ubi per easdem reductiones, quas pro littera M instituimus, quaelibet formula integralis ad praecedentem, ope reductionis $\int x^{2m} \partial v = \frac{4m-2}{m}\int x^{2m-2}\partial v$ reduci potest. Sumto enim $m = \frac{3}{2}$ erit $\int x^3 \partial v = \frac{8}{3}\int x \partial v$. Sumto $m = \frac{5}{2}$ erit $\int x^5 \partial v = \frac{16}{5}\int x^3 \partial v$. Sumto $n = \frac{7}{2}$ erit $\int x^7 \partial v = \frac{24}{7}\int x^5 \partial v$, etc. unde patet, si modo $\int x \partial v$ evanesceret etiam sequentia omnia esse evanitura.

§. 57. Quoniam igitur invenimus $dv = \frac{2C\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}$, erit $x\partial v = \frac{2Cx\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}$, hincque $\int x \partial v = 2C\sqrt{4-xx}$, quae expressio binis casibus vel $x = +2$ vel $x = -2$ evanescit. Quam obrem si terminos integrationis constituamus $x = 2$, et $x = -2$, non solum partes illae subnexae Πx^{2n-1}, verum etiam totus valor integralis $\int N \partial v$ evanescet, atque adeo hoc casu quaesito nostro perfecte satisfecimus, cum sit $p = \frac{\int \partial v\,(1+x)n}{v}$

§. 58. Cum igitur invenerimus $\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}$, ejus integrale, ita sumtum ut evanescat posito $x = 2$, erit

$v = 2$

$v = 2\,C\,A \sin\frac{x}{2} - 2\,C\frac{\pi}{2}$, quae expressio reducitur ad hanc: $v = -2\,C\,A\cos\frac{x}{2}$; unde hoc integrali usque ad alterum terminum $x = -2$ extenso prodit $v = -2\,C\,\pi$. His igitur valoribus ſubſtitutis erit formula quaeſita $p = -\frac{1}{\pi}\int\frac{(1+x)^n\,\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}$. Haec ſcil. formula integralis, a termino $x = 2$ usque ad terminum $x = -2$ extensa, verum praebebit valorem ipſius p.

§. 59. Quo hanc formulam concinniorem reddamus, ſtatuamus $x = 2\cos\Phi$, ubi evidens eſt casu $x = 2$ fieri angulum $\Phi = 0$; casu vero $x = -2$ fieri $\Phi = \pi$, ita ut hoc angulo introducto integrale capi debeat a termino $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = \pi$; tum vero erit $\partial x = -2\,\partial\Phi\sin\Phi$ et $\sqrt{4-xx} = 2\sin\Phi$, qua ſubſtitutione facta nanciscemur hanc aequationem:

$$p = +\frac{1}{\pi}\int(1+2\cos\Phi)^n\,\partial\Phi\begin{bmatrix}\text{a}\ \Phi = 0\\ \text{ad}\ = \pi\end{bmatrix}.$$

Determinatio reliquarum litterarum per formulas finitas integrales.

§. 60. Hoc facile praeſtari poterit per relationes quas ſupra inter has litteras tradidimus. Primo ſcilicet habuimus $2q = \Delta p = p' - p$, ubi p' nascitur ex p, si loco n ſcribatur $n+1$. Quoniam igitur modo invenimus $p = \frac{1}{\pi}\int(1+2\cos\Phi)^n\partial\Phi$, erit $p' = \frac{1}{\pi}\int(1+2\cos\Phi)^{n+1}\,\partial\Phi$, hincque ergo erit $p' - p = \frac{2}{\pi}\int\cos\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n\,\partial\Phi$, quo valore ſubſtituto reperietur

$$q = \frac{1}{\pi}\int\partial\Phi\cos\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n\begin{bmatrix}\text{a}\ \Phi = 0\\ \text{ad}\,\Phi = \pi\end{bmatrix}$$

hinc ergo porro erit

$$q' = \frac{1}{\pi}\int\partial\Phi\cos\Phi\,(1+2\cos\Phi)^{n+1}.$$

§. 61.

§. 61. Supra autem vidimus esse $r = q' - q - p$, nunc vero erit $q' - q = \frac{2}{\pi}\int \partial\Phi \cos\Phi^2 (1+2\cos\Phi)^n$. Hinc ergo si subtrahatur p, ob $2\cos\Phi^2 - 1 = \cos 2\Phi$, elicimus litteram

$$r = \tfrac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos 2\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n,$$ unde iterum fit
$$r' = \tfrac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos 2\Phi\,(1+2\cos\Phi)^{n+1}.$$

§. 62. Quoniam igitur supra invenimus $s = r' - r - q$, habebimus hic primo $r' - r = \frac{2}{\pi}\int \partial\Phi \cos\Phi\cos 2\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n$. Hinc ergo si subtrahatur q, ob $2\cos\Phi\cos 2\Phi - \cos\Phi = \cos 3\Phi$, erit $s = \frac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos 3\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n$. Simili modo jam evidens est fore $t = \frac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos 4\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n$; eodemque modo reperietur fore $u = \frac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos 5\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n$; atque adeo in genere erit $z = \frac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos\lambda\Phi\,(1+2\cos\Phi)^n$.

§. 63. Quoniam Analysis, qua hic usi sumus, prorsus est singularis et parum consueta, haud abs re erit veritatem harum formularum demonstratione analytica muniri, quam de singulis uno quasi labore sequenti modo instituere licebit. Inchoandum erit ab evolutione formulae $(1+2\cos\Phi)^n$, quae perducit ad hanc seriem:

$$1 + \tbinom{n}{1} 2\cos\Phi + \tbinom{n}{2} 4\cos\Phi^2 + \tbinom{n}{3} 8\cos\Phi^3 + \tbinom{n}{4} 16\cos\Phi^4 + \text{etc.}$$

Per notas autem angulorum reductiones constat fore

$$2\cos\Phi = 2\cos\Phi$$
$$4\cos\Phi^2 = 2\cos 2\Phi + 2$$
$$8\cos\Phi^3 = 2\cos 3\Phi + 6\cos\Phi$$
$$16\cos\Phi^4 = 2\cos 4\Phi + 8\cos 2\Phi + 6$$
$$32\cos\Phi^5 = 2\cos 5\Phi + 10\cos 3\Phi + 20\cos\Phi$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$2^\alpha \cos\Phi^\alpha = 2\cos\alpha\Phi + 2\tbinom{\alpha}{1}\cos(\alpha-2)\Phi + 2\tbinom{\alpha}{2}\cos(\alpha+4)\Phi + 2\tbinom{\alpha}{3}\cos(\alpha-6)\Phi + \text{etc.}$$

ubi probe notandum eſt, quando terminus ultimus eſt abſolutus, tum tantum ſimplum capi debere; praeterea vero etiam cosinus angulorum negativorum prorsus omitti debent.

§. 64. His igitur rite dispositis erit

$$(1+2\cos\Phi)^n = 1+\left(\tfrac{n}{1}\right)2\cos\Phi+\left(\tfrac{n}{2}\right)2(\cos 2\Phi+1)+\left(\tfrac{n}{3}\right)2(\cos 3\Phi+3\cos\Phi)$$
$$+\left(\tfrac{n}{4}\right)2(\cos 4\Phi+4\cos 2\Phi+3)+\left(\tfrac{n}{5}\right)2(\cos 5\Phi+5\cos 3\Phi+10\cos\Phi)$$
$$+\left(\tfrac{n}{6}\right)2(\cos 6\Phi+6\cos 4\Phi+15\cos 2\Phi+10)+\text{etc.}$$

unde ſequentes integrationes ſunt petendae.

§ 65. Incipiamus a prima litera p, ubi hanc ſeriem ducere in $\partial\Phi$ et integrari oportet. Cum igitur in genere ſit $\int\partial\Phi\cos m\Phi = \frac{1}{m}\sin m\Phi$, iste valor jam evanescit poſito $\Phi = 0$, pro altero integrationis termino $\Phi = \pi$ manifeſto evanescit, ſi quidem omnes numeri n ſunt integri. Ad integrationem igitur ſoli termini abſoluti relinquuntur, tum vero integrali rite ſumto erit $\int\partial\Phi = \pi$, quo obſervato erit noſtrum integrale

$$\int\partial\Phi(1+2\cos\Phi)^n = \pi+2\left(\tfrac{n}{2}\right)\pi+6\left(\tfrac{n}{4}\right)\pi+20\left(\tfrac{n}{6}\right)\pi+\text{etc.}$$

Quod ſi hic forma generalis ſupra data conſulatur, hi coëfficientes numerici revocentur ad formas $\left(\frac{2}{1}\right)$, $\left(\frac{4}{2}\right)$, $\left(\frac{6}{3}\right)$, etc. prorsus uti veritas formulae poſtulat. Erit enim

$$p = \tfrac{1}{\pi}\int\partial\Phi(1+2\cos\Phi)^n = 1+\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{n}{2}\right)+\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{n}{4}\right)+\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{n}{6}\right)+\text{etc.}$$

§. 66. Pergamus ad ſecundam litteram q, ubi ſuperiorem ſeriem per $\partial\Phi\cos\Phi$ multiplicari et integrari oportet. Ad hoc obſervetur esse in genere

$$\int\partial\Phi\cos\Phi\cos m\Phi = \tfrac{1}{2(m+1)}\sin(m+1)\Phi+\tfrac{1}{2(m-1)}\sin(m-1)\Phi$$

quae expressio poſito $\Phi = \pi$ in nihilum abit, ſolo casu excepto quo $m = 1$, quippe quo fit $\int\partial\Phi\cos\Phi\cos\Phi = \frac{1}{2}\Phi = \frac{\pi}{2}$.

Ex

Ex quo intelligitur, ex ſuperiori ſerie alios terminos hic non in computum venire, niſi qui contineant $\cos\Phi$, qui ſunt:
$2\binom{n}{1}\cos\Phi + 2\binom{3}{1}\binom{n}{2}\cos\Phi + 2\binom{5}{2}\binom{n}{5}\cos\Phi + 2\binom{7}{3}\binom{n}{7}\cos\Phi + \text{etc.}$
Hi autem termini ducti in $\partial\Phi\cos\Phi$ et integrati, ob $\int 2\partial\Phi\cos\Phi^2 = \pi$, dabunt, per π diviſi, ipſum valorem

$$q = \binom{n}{1} + \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} + \binom{7}{3}\binom{n}{7} + \text{etc.}$$

§ 67. Pro littera r ſuperior ſeries multiplicari debet per $\partial\Phi\cos 2\Phi$. Cum igitur in genere ſit $\cos\Phi\cos m\Phi = \frac{1}{2}\cos(m+2)\Phi + \frac{1}{2}\cos(m-2)\Phi$, per $\partial\Phi$ multiplicando integrale pro termino $\Phi = \pi$ ſemper evanescit, excepto ſolo casu $m = 2$, quippe quo fit $\int\partial\Phi\cos 2\Phi^2 = \frac{\pi}{2}$. Hic igitur ex ſerie ſuperiori ſoli termini per $\cos 2\Phi$ affecti in computum veniunt, qui ſunt

$$2\cos 2\Phi\left(\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \text{etc.}\right)$$

Quia igitur $2\int\partial\Phi\cos 2\Phi^2 = \pi$, omnibus terminis colligendis et per π dividendo reperitur

$$r = \binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{2}\binom{n}{8} + \text{etc.}$$

§. 68. Quo haec clariora reddantur ac facilius ad valorem generalem z accommodari queant, evolutionem poteſtatis $(1 + 2\cos\Phi)^n$ ſtatim ſecundum cosinus multiplorum anguli Φ disponamus hoc modo:

$$\begin{aligned}(1+2\cos\Phi)^n = 1 &+ \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} + \binom{6}{3}\binom{n}{6} + \binom{8}{4}\binom{n}{8} + \text{etc.}\\
&+ 2\cos\Phi\left(\binom{n}{1} + \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} + \binom{7}{3}\binom{n}{7} + \binom{9}{4}\binom{n}{9} + \text{etc.}\right)\\
&+ 2\cos 2\Phi\left(\binom{n}{2} + \binom{3}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \binom{10}{4}\binom{n}{10} + \text{etc.}\right)\\
&+ 2\cos 3\Phi\left(\binom{n}{3} + \binom{5}{1}\binom{n}{5} + \binom{7}{2}\binom{n}{7} + \binom{9}{3}\binom{n}{9} + \binom{11}{4}\binom{n}{11} + \text{etc.}\right)\\
&\quad - - - - - - - - - - - - - - - - -\\
&\quad - - - - - - - - - - - - - - - - -\\
&+ 2\cos\lambda\Phi\left(\binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4} + \binom{\lambda+6}{3}\binom{n}{\lambda+6} + \text{etc.}\right)\end{aligned}$$

§. 69. Quod si jam hanc aequationem per $\partial\Phi \cos\lambda\Phi$ multiplicemus et integremus, omnia haec integralia, terminis praescriptis inclusa, evanescent, excepto membro $2\cos\lambda\Phi(\ldots)$, propterea quod productum $\cos\lambda\Phi^2$ continet partem absolutam, unde per integrationem oritur π, ita ut sit $\int\partial\Phi\cos\lambda\Phi(1+2\cos\Phi)^n = \pi\left(\left(\frac{n}{\lambda}\right)+\left(\frac{\lambda+2}{1}\right)\left(\frac{n}{\lambda+2}\right)+\left(\frac{\lambda+4}{2}\right)\left(\frac{n}{\lambda+4}\right)+\text{etc.}\right)$ qui valor per π divisus ipsum valorem ipsius z supra inventum praebet: unde veritas harum novarum expressionum luculenter est demonstrata.

§. Ceterum si singulas series paragraphi penultimi vel leviter consideremus, deprehendimus eas ipsis litteris nostris p, q, r, s, etc. esse aequales, ita ut nunc sit $(1+2\cos\Phi)^n = p + q\cos\Phi + r\cos 2\Phi + s\cos 3\Phi + t\cos 4\Phi + \text{etc.}$ ubi simul ratio est manifesta, cur litterae q, r, s, etc. duplicentur, quippe quae in hoc est posita, quod in evolutione formulae $(1+x+xx)^n$ littera p semel tantum in medio, reliquae vero litterae bis, a medio aequidistantes, occurrunt. Ex quo haec egregia affinitas inter illas binas potestates $(1+x+xx)^n$ et $(1+2\cos\Phi)^n$, summa attentione digna est censenda.

Investigatio summae seriei

$$P = 1 + x + 3xx + 7x^3 + 19x^4 + \cdots + px^n + p'x^{n+1} + \text{etc.}$$

§. 71. Quoniam hujus seriei terminus generalis est px^n, quem sequuntur $p'x^{n+1}$ et $p''x^{n+2}$, inter has ternas quantitates p, p', p'' invenimus supra hanc relationem:

$$(n+2)p'' = (3n+3)p' + 3(n+1)p$$

quam hoc modo ad usum nostrum accommodatam referamus:

$$3(n+1)p + (n+1)p' + (n+2)p' - (n+2)p'' = 0.$$

§. 72.

§. 72. Cum jam ſeries noſtra ſit

$1 + x + 3xx + 5x^3 + 19x^4 + \text{- - - -} + px^n + p'x^{n+1} + p''x^{n+2} + \text{etc.}$

ejusmodi operationes inſtituamus, quibus relatio modo allata obtineatur, id quod ſequenti modo commodissime fiet:

$$\frac{3\partial \cdot Px}{\partial x} = 3 + 0x + 27xx \text{ - - - - - } + 3(n+1)px^n + \text{etc.}$$
$$+\frac{\partial \cdot P}{\partial x} = 1 + 6x + 21xx \text{ - - - - - } + (n+1)p'x^n + \text{etc.}$$
$$+\frac{\partial \cdot Px}{x\partial x} = \frac{1}{x} + 2 + 9x + 28xx \text{ - - - } + (n+2)p'x^n + \text{etc.}$$
$$-\frac{\partial P}{x\partial x} = -\frac{1}{x} - 6 - 21x - 76xx \text{ - - - } - (n+2)p'x^n + \text{etc.}$$

Colligantur jam hae quatuor ſeries in unam ſummam atque obtinebimus ſequentem aequationem:

$$\frac{3\partial \cdot Px}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \cdot Px}{x\partial x} - \frac{\partial P}{x\partial x} = 0,$$

quandoquidem omnes termini ſe mutuo deſtruunt.

§. 73. Hoc ergo modo deducti ſumus ad aequationem finitam differentialem primi gradus, quae per $x\partial x$ multiplicata et in ordinem redacta ita ſe habebit:

$$P\partial x(3x+1) + \partial P(3xx+2x-1) = 0,$$

unde ergo fit $\frac{\partial P}{P} = \frac{\partial x(1+3x)}{1-2x-3xx}$, quae aequatio integrata praebet $l\,P = -\frac{1}{2}l(1-2x-3xx) + lC$, conſequenter $P = \frac{C}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}$. Hic ad conſtantem C determinandam notetur tantum noſtram ſeriem propoſitam casu $x = 0$ praebere $P = 1$, unde patet ſumi debere $C = 1$, ita ut ſit ſumma ſeriei $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}$.

§. 74. Praeter ergo expectationem perfigimus ad ſummam algebraicam, quae expressio etiam ita eſt comparata, ut in ſeriem converſa ipſam noſtram ſeriem reproducat, id quod oſtendisse operae erit pretium. Cum igitur ſit

$P =$

$P = (1 - 2x - 3xx)^{-\frac{1}{2}}$, si hujus trinomii partes posteriores conjunctim spectentur, evolutio nobis dabit

$P = 1 + \frac{1}{2}(2x + 3xx) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2x + 3xx)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}(2x + 3xx)^3 + \text{etc.}$

quam sufficiet ad potestatem tantum tertiam usque evolvisse. Hoc modo nanciscemur

$$P = 1 + x + \tfrac{3}{2}xx + \tfrac{9}{2}x^3 + \text{etc.} = 1 + x + 3xx + 7x^3 + \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{3}{2}xx + \tfrac{5}{2}x^3$$

quae igitur perfecte congruit.

§. 75. At vero haec eadem summa adhuc alio modo investigari potest, ex formula scilicet integrali, quam pro valore litterae p invenimus:

$$p = \tfrac{1}{\pi}\int \partial\Phi\,(1 + 2\cos\Phi)^n \left[\begin{smallmatrix} a \\ ad\ \Phi = 0 \end{smallmatrix}\right.^{\Phi = \pi}.$$

Haec enim formula, sumto $n = 0$, per x multiplicata, dat terminum secundum x; casu porro $n = 2$, per xx multiplicata, dat terminum tertium $3xx$; quo observato summa quaesita ita poterit repraesentari:

$$P = \tfrac{1}{\pi}\int \partial\Phi\,(1 + x(1 + 2\cos\Phi) + xx\,(1 + 2\cos\Phi)^2$$
$$+ x^3\,(1 + 2\cos\Phi)^3 + \text{etc.})$$

ubi probe est observandum, in hac integratione quantitatem x tanquam constantem spectari, siquidem solus angulus Φ est variabilis.

§. 76. Evidens autem est, seriem infinitam, in quam elementum $\partial\Phi$ duci oportet, esse geometricam, cujus ergo summa erit $\frac{1}{1 - x(1 + 2\cos\Phi)} + \frac{1}{1 - x - 2x\cos\Phi}$, sicque adeo pro P jam habemus hanc expressionem finitam:

$$P = \tfrac{1}{\pi}\int \frac{\partial\Phi}{1 - x - 2x\cos\Phi} \left[\begin{smallmatrix} a \\ ad\ \Phi = 0 \end{smallmatrix}\right.^{\Phi = \pi},$$

quae

quae aequatio ita poterit exhiberi:

$$P = \frac{1}{\pi(1-x)} \int \frac{\partial\Phi}{1 - \frac{2x}{1-x}\cos\Phi} \left[\text{ad } \Phi = 0 \text{ vel } \pi\right],$$

ubi jam brevitatis gratia ſtatuamus $\frac{2x}{1-x} = k$, ut habeamus

$$P = \frac{1}{\pi(1-x)} \int \frac{\partial\Phi}{1 - k\cos\Phi}.$$

§. 77. Conſtat autem hujus formulae $\frac{\partial\Phi}{1+n\cos\Phi}$ integrale eſſe $\frac{1}{\sqrt{(1-nn)}} A\cos\frac{\cos\Phi + n}{1 + n\cos\Phi}$; unde ſi loco n ſcribamus $-k$, adipiscimur pro noſtro casu $P = \frac{1}{\pi(1-x)\sqrt{(1-kk)}} A\cos\frac{\cos\Phi + k}{1 - k\cos\Phi}$, ubi conſtantis additione non eſt opus, quia haec expressio casu $\Phi = 0$ ſponte evaneſcit. Faciamus igitur pro altero termino $\Phi = \pi$, unde ſit $\cos\Phi = -1$ et $A\cos\frac{\cos\Phi - k}{1 - k\cos\Phi} = A\cos -1 = \pi$, ergo habebimus $P = \frac{1}{(1-x).(1-kk)}$, quae expressio ob $k = \frac{2x}{1-x}$, abit in hanc: $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}$, prorſus ut ante.

§ 78 Cum ſit $1 - 2x - 3xx = (1-x)^2 - 4xx = (1+x)(1-3x)$, ſequitur ſeriem noſtram ſummandam duobus casibus fieri infinite magnam, ſcilicet altero casu quo $x = -1$, altero vero quo $x = \frac{1}{3}$. Tum vero noſtra ſeries habebit ſummam finitam, quando x continetur intra hos limites: -1 et $\frac{1}{3}$; ſin autem x extra hos limites accipiatur, tum ſumma ſemper erit imaginaria. Ita ſumto $x = \frac{1}{4}$, habebitur haec ſummatio:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \frac{19}{4^4} + \frac{51}{4^5} + \frac{141}{4^6} + \text{etc.} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Investigatio summae reliquarum ſerierum Q, R, S, etc. supra §. 6. expositarum.

§. 79. Incipiamus a serie Q, quae eſt

$$Q = xx + 2x^3 + 6x^4 + \ldots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + \text{etc.}$$

cujus

cujus primus terminus xx ex potestate $n = 1$ oritur; ubi perinde ac si seriem ab $n = 0$ inchoare velimus, praefigi debet terminus $0x$. Pro hac autem serie ostendimus supra esse $q = \frac{1}{2}p' - p$, unde hujus seriei summa ex serie prima p sequenti modo elici poterit.

§ 80. Cum sit $P = 1 + x + 3xx + \ldots + px^n + p'x^{n+1} + \text{etc.}$ erit $Px = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x + xx + \quad . \quad . \quad + px^{n+1} + \text{etc.}$ quae posterior series a priori subtracta relinquit

$$P(1-x) = 1 + 2xx + \quad . \quad . \quad . \quad + (p'-p)x^{n+1} + \text{etc.}$$

Quare cum sit $p' - p = 2q$, erit

$P(1-x) = 1 + 2Q$; sicque innotescit hujus seriei summa, cum sit $Q = \frac{P(1-x)-1}{2}$. Modo ante autem vidimus esse $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}$, sicque habebimus $Q = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2\sqrt{(1-2x-3xx)}}$.

§. 81. Procedamus ad seriem R, quae ita se habebat: $R = x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \quad . \quad . \quad . \quad + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.}$ cujus primus terminus x^4 ex potestate $n = 2$ est ortus, unde praefixi concipiendi sunt bini termini $0x^2 + 0x^3$, ad cujus summam inveniendam notetur esse $r = q' - q - p$. Hinc si sequentes operationes instituantur:

$$Q = xx + 2x^3 + \quad . \quad . \quad . \quad + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + \text{etc.}$$
$$-Qx = \quad -x^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \quad . \quad . - qx^{n+2} - \text{etc.}$$
$$-Px^2 = -xx - x^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - px^{n+2} - \text{etc.}$$

inde conjunctim fiet

$$Q(1-x) - Pxx = (q' - q - p)x^{n+2} = R.$$

§. 82. Hoc igitur modo summam R determinavimus per binas series praecedentes Q et P, quae cum jam sint cognitae, etiam summam seriei R algebraice per certam functionem ipsius x expressam sumus adepti. quae quomodo commode evolvi queat, deinceps ostendemus.

§. 83.

§. 83. Pro ſerie S, quae ita erat propoſita:

$$S = x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \ldots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.}$$

ei tres termini evanescentes praefigi ſunt censendi, ſcilicet $0x^3 + 0x^4 + 0x^5$, ſiquidem a poteſtate $n = 0$ incipere velimus. Supra autem invenimus esse $s = r' - r - q$, unde ſequentes operationes instituamus:

$$R = x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \ldots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.}$$
$$-Rx = \quad -x^5 - 3x^6 - \ldots - rx^{n+3} - \text{etc.}$$
$$-Qxx = -x^4 - 2x^5 - 6x^6 - \ldots - qx^{n+3} - \text{etc.}$$

quibus tribus ſeriebus collectis oritur haec series:

$$x^6 + \ldots + sx^{n+3} + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries S. Quocirca ſumma hujus ſeriei per binas praecedentes Q et R ita determinatur ut ſit $S = R(1-x) - Qxx$, cujus evolutio etiam ſatis ſimpliciter expediri poterit, uti mox oſtendetur.

§. 84. Eodem modo ſeries T per binas praecedentes R et S definietur hoc modo:

$$S = x^6 + 4x^7 + 15x^8 \ldots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.}$$
$$-Sx = \quad -x^7 - 4x^8 \ldots - sx^{n+4} - \text{etc.}$$
$$-Rxx = -x^6 - 3x^7 - 10x^8 \ldots - rx^{n+4} - \text{etc.}$$

Cum igitur $s' - s - r = t$, hae tres ſeries collectae dabunt

$$S(1-x) - Rxx = x^8 + \ldots + tx^{n+4} + \text{etc.}$$

quae cum ſit ipſa ſeries T, erit $T = S(1-x) - Rxx$.

§. 85. Hinc igitur manifeſtum eſt ſingulas harum ſerierum ſatis ſimpliciter per binas praecedentes determinari posse, atque adeo per legem penitus uniformem. Eas conjunctim ob oculos

ponamus:

$$Q = \frac{P(1-x)-1}{2}$$
$$R = Q(1-x) - Pxx$$
$$S = R(1-x) - Qxx$$
$$T = S(1-x) - Rxx$$
$$U = T(1-x) - Sxx$$
etc.

unde patet ommnes has ſummas ſecundum ſeriem recurrentem procedere, cujus ſcala relationis eſt $(1-x, -xx$. Verum mox patebit, hanc ſeriem adeo esse geometricam.

§. 86. Ad hoc ostendendum, cum facta evolutione ſit $\frac{Q}{P} = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2}$, vocemus brevitatis gratia $\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2} = v$, ut habeamus $Q = Pv$; inde autem ſublata irrationalitate, cum ſit $\sqrt{1-2x-3xx} = 1-x-2v$, orietur haec aequatio: $(1-x)^2 - 4xx = (1-x)^2 - 4v(1-x) - 4vv$, quae reducitur ad iſtam: $v(1-x) - xx = vv$, quod probe notasse juvabit.

§. 87. Jam pro ſerie R, ſi loco Q hunc valorem Pv ſubſtituamus, orietur haec aequatio:
$R = P(v(1-x) - xx$, ideoque per relationem modo notatam $R = Pvv$. Si jam porro loco Q et R valores inventos ſcribamus, nanciscemur simili modo:

$$S = Pv(v(1-x) - xx) = Pv^3$$
$$T = Pvv(v(1-x) - xx) = Pv^4$$
$$U = Pv^3(v(1-x) - xx) = Pv^5$$
- - - - - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - - - - -
$$Z = Pv^{\lambda-1}(v(1-x) - xx) = Pv^{\lambda}.$$

§. 88.

§. 88. Quod ſi jam has determinationes ad formulas integrales, quas pro litteris p, q, r, etc. invenimus, transferamus, quoniam invenimus $z = \frac{1}{\pi}\int \partial\Phi \cos \lambda\Phi \,(1 + 2\cos\Phi)^n$, ſi exponenti n ſucceſſive valores tribuamus $0, 1, 2, 3, 4$ etc. quia ſeries Z a poteſtate x^λ inchoare eſt cenſenda, formula differentialis $\partial\Phi \cos \lambda\Phi$ per hanc ſeriem geometricam multiplicari debebit:

$$(1 + 2\cos\Phi)^0 x^\lambda + (1 + 2\cos\Phi)^1 x^{\lambda+1} + (1 + 2\cos\Phi)^2 x^{\lambda+2} + \text{etc.}$$

cujus ſumma eſt $\frac{x^\lambda}{1 - x - 2x\cos\Phi}$, qua ergo in calculum introducta ſumma quaeſita Z ita exprimetur:

$$Z = \tfrac{1}{\pi}\int \frac{x^\lambda \partial\Phi \cos\lambda\Phi}{1 - x - 2x\cos\Phi} \begin{bmatrix} \text{a } \Phi = 0 \\ \text{ad } \Phi = \pi \end{bmatrix},$$ ubi quantitas x eſt conſtans.

§. 89. Quoniam igitur hic invenimus iſtam ſummam ſcil. $Z = Pv^\lambda = \frac{v^\lambda}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}$, exiſtente

$v = \frac{1 - x - \sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}{2}$,

nunc hujus ipſius formulae integralis valorem adeo algebraicum exhibere poterimus, quandoquidem nunc novimus eſſe.

$$\tfrac{1}{\pi}\int \frac{x^\lambda \partial\Phi \cos\lambda\Phi}{1 - x - 2x\cos\Phi} = \frac{v^\lambda}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}$$

ſive multiplicando per $\frac{\pi}{x^\lambda}$ habebimus

$$\int \frac{\partial\Phi \cos\lambda\Phi}{1 - x - 2x\cos\Phi} = \frac{\pi}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}} \left(\frac{v}{x}\right)^\lambda.$$

§. 90. Quoniam haec integratio majori attentione digna videtur, eam in commodiorem formam transfundamus, et quoniam x et v hic ut conſtantes ſpectantur, ponamus $\frac{v}{x} = b$, atque ob $v = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2}$, erit $2bx = 1-x-\sqrt{1-2x-3xx}$, quae aequatio, ſublata irrationalitate, praebet: $4bbxx-4bx(1-x)+(1-x)^2=(1-x)^2-4xx$, quae reducitur ad hanc: $bbx-b+bx=+x$, unde ipsa quantitas x satis commode determinatur, cum fiat $x = \frac{b}{bb+b-1}$, ideoque $1-x = \frac{bb+1}{bb+b+1}$, hincque porro cum esset $\sqrt{1-2x-3xx} = 1-x-2bx$, erit nunc $\sqrt{1-2x-3xx} = \frac{1-bb}{1+b+bb}$.

§. 91. Quod ſi ergo loco quantitatis x litteram b in noſtrum calculum introducamus, integratio inventa ad hanc formam reducetur ſimpliciorem:

$$\int \frac{\partial\Phi \cos\lambda\Phi}{1-2b\cos\Phi+bb} \begin{bmatrix} \text{a } \Phi = 0 \\ \text{ad } \Phi = \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi b^\lambda}{1-bb},$$

cujus veritas ex calculis hactenus expeditis eſt deducta; verum etiam immediate et directe demonſtrari poteſt, quo ipſo praecedentia omnia eo magis corroborabuntur.

§. 92. Ad hoc igitur demonſtrandum in ſubſidium vocemus ſatis notam integrationem, qua eſt

$$\int \frac{\partial\Phi}{\alpha+\beta\cos\Phi} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)}} A\cos\frac{\alpha\cos\Phi+\beta}{\alpha+\beta\cos\Phi}.$$

Fiat nunc $\alpha = 1+bb$ et $\beta = -2b$ et habebimus

$$\int \frac{\partial\Phi}{1-2b\cos\Phi+bb} = \frac{1}{1-bb} A\cos\frac{(1+bb)\cos\Phi-2b}{1-2b\cos\Phi+bb},$$

quod integrale jam evanescit posito $\Phi = 0$. Posito ergo pro altero termino $\Phi = \pi$, hoc integrale evadet $\frac{\pi}{1-bb}$.

§. 93.

§. 93. Quoniam igitur pro noſtris terminis integrationis invenimus $\int \frac{\partial \Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} = \frac{\pi}{1-bb}$, atque manifeſto eſt $\int \partial\Phi = \pi$, ideoque

$$\int \frac{\partial\Phi\,(1 - 2b\cos\Phi + bb)}{1 - 2b\cos\Phi + bb} = \pi,$$

hanc formam in duas partes diſtribuendo habebimus

$$\pi = (1+bb)\int \frac{\partial\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} - 2b\int \frac{\partial\Phi\cos\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb},$$

unde colligimus

$$\int \frac{\partial\Phi\cos\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} = \frac{\pi b}{1-bb}.$$

§. 94. Quoniam pro noſtris terminis integrationis in genere eſt $\int \partial\Phi \cos i\Phi = 0$, ſiquidem i fuerit numerus integer, multiplicemus hanc formulam ſupra et infra per $1 + bb - 2b\cos\Phi$, atque obtinebimus

$$\int \frac{\partial\Phi\,(1 + bb\cos\Phi) - b\cos(i-1)\Phi - b\cos(i+1)\Phi}{1 + bb - 2b\cos\Phi}\,\Phi = 0.$$

Haec forma jam in tres partes ſecta nobis dabit

$$(1+bb)\int \frac{\partial\Phi\cos i\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} = b\int \frac{\partial\Phi\cos(i-1)\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} + b\int \frac{\partial\Phi\cos(i+1)\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb},$$

unde derivamus hanc reductionem generalem:

$$\int \frac{\partial\Phi\cos(i-1)\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} = \frac{1+bb}{b}\int \frac{\partial\Phi\cos i\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb} - \int \frac{\partial\Phi\cos(i+1)\Phi}{1 - 2b\cos\Phi + bb},$$

cujus ope ex integralibus binis pro angulis $i\Phi$ et $(i-1)\Phi$ integrale pro angulo $(i+1)\Phi$ determinari poteſt, unde ſequentem tabulam conficere licebit:

$$\int \frac{\partial\Phi}{1 - bb - 2b\cos\Phi} = \frac{\pi}{1-bb}$$

$$\int \frac{\partial\Phi\cos\Phi}{1 + bb - 2b\cos\Phi} = \frac{\pi b}{1-bb}$$

$$\int \frac{\partial\Phi\cos 2\Phi}{1 + bb - 2b\cos\Phi} = \frac{\pi bb}{1-bb}$$

$\int \partial\Phi$

$$\int \frac{\partial\Phi \cos 3\Phi}{1 + bb - 2b\cos\Phi} = \frac{\pi b3}{1 - bb}$$

$$\int \frac{\partial\Phi \cos 4\Phi}{1 + bb - 2b\cos\Phi} = \frac{\pi b4}{1 - bb}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\int \frac{\partial\Phi \cos \lambda\Phi}{1 + bb - 2b\cos\Phi} = \frac{\pi b\lambda}{1 - bb}$$

prorsus uti ſupra invenimus.

DE

DE INNUMERIS CURVIS ALGEBRAICIS QUARUM LONGITUDINEM PER ARCUS HYPERBOLICOS METIRI LICET.

AUCTORE
NICOLAO FUSS.

Conventui exhibita die 28. Jun. 1798.

§. 1.

In Tomo quinto novorum Actorum Academiae, pro anno 1787, duae reperiuntur dissertationes viri immortalis Leonardi Euleri, super argumento plane novo et a nemine antea tractato; prior inscripta est: *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet;* altera: *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet.* In calce posterioris dissertationis auctor declarat, se nullo adhuc modo vel unicam saltem curvam algebraicam eruere potuisse, cujus singulos arcus per arcus hyperbolicos metiri liceret. „Si talis quaestio" inquit Eulerus loco citato „circa arcus hyperbolicos proponatur, fa„teri cogor, nullo adhuc modo me vel unicam saltem cur„vam algebraicam eruere potuisse, cujus singuli arcus per „formulam $\int \frac{\partial v}{vv} \sqrt{1+v^4}$ — quae arcum fistit Hyperbolae ae„quilaterae — exprimerentur. Sin autem aequationem ge„neralem pro Hyperbola assumere velimus, pro qua est $y = n\sqrt{1+vv}$, elementum arcus inde nascitur $\partial S = \frac{\partial v \sqrt{1+(nn+1)vv}}{\sqrt{1+vv}}$,

„quae

„quae formula ita eſt comparata, ut omnia artificia, quae „quidem mihi detegere licuit, penitus fruſtretur. Quin „etiam calculus angulorum hic nullo modo cum ſucceſſu „in ſubſidium vocari poteſt. Neutiquam autem etiamnunc „assesverare auſim, praeter Hyperbolam nullas alias dari „curvas algebraicas, quarum longitudinem per arcus hyper„bolicos metiri liceat, quemadmodum hoc de circulo audac„ter pronunciare non dubitavi.

§. 2. Hanc poſtremam ſententiam, de circulo ſcilicet, Eulerus in medium protulerat in dissertatione, quae extat in Opusculorum analyticorum Tomo ſecundo, ſub titulo: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonſtratio adhuc deſideratur*; eandem vero ſententiam poſtmodum, paullo ante ejus obitum, retractavit, in dissertatione nondum typis mandata: *De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri licet*; ejus autem opinionem respectu Hyperbolae, tum temporis adhuc incertam fuisse, ex alia dissertatione apparet, una cum modo memorata ſimul eodem die Conventui academico exhibita, at nondum impressa, in qua Eulerus iterum declarabat: „nullam adhuc „inveſtigare mihi licuit curvam algebraicam, cujus rectifi„catio cum Hyperbola conveniret.“ Haud immerito idcirco ſubjunxit (Nov. Act. Tomo V. pag. 84.) „Hac igitur ſpe„culatione amplissimus campus aperitur in quo Geometrae „non ſine inſigni fructu et Analyseos ulteriori perfectione „elaborare poterunt.“

§. 3. Iſta argumenti propositi laudatio irrita hucusque fuit, nec quemque, quantum quidem mihi conſtat, induxit ad reſolvendum problema de inveniendis lineis curvis alge-

algebraicis, quas per arcus hyperbolicos metiri licet. Mihimet ipsi, dissertationem memoratam relegenti, locus citatus potentissimo fuerat stimulo; deterrueant autem ingentes difficultates, quibus obvolutum videbatur argumentum a tanto viro totiesque frustra susceptum. Post plura tamen tentamina jam ante aliquot tempus, subsidio potissimum calculi angulorum, incideram in solutionem particularem, curvam exhibentem algebraicam, cujus longitudinem indefinitam per arcus Hyperbolae aequilaterae metiri licebat. Post hunc primum passum non difficile erat ulterius progredi et plures alias, adeo innumeras, curvas algebraicas invenire, eadem cum Hyperbola aequilatera rectificatione gaudentes; ipsa methodus, in solvendo hoc primo problemate adhibita, eo ducebat. Solutionem vero generaliorem, non ad Hyperbolas aequilateras restrictam, tum temporis invenire non potueram Aliis deinceps distractus negotiis, has disquisitiones seposui, et nuper demum argumentum derelictum, nec sine aliquo successu, resumsi. Inter varias enim formulas, quibus elementum arcus Hyperbolae scalenae exprimitur, ejusmodi eligere mihi contigit, cujus ope solutionem problematis propositi sum assecutus, quam ergo, una cum priore, ad Hyperbolam aequilateram restrictam, heic exhibere non dubito. Ante autem aliquot curvas algebraicas assignabo, singulari methodo erutas, quarum arcus quoque per ipsam formulam $\int \frac{dv}{v} \sqrt{1+v^4}$, de qua supra §. 1. sermo fuit. exprimere licet. Reliquas autem solutiones, Hyperbolam aequilateram spectantes, commodiori formulae superstruam.

Problema.

§. 4. *Invenire curvam algebraicam, cujus singuli arcus, ut arcus Hyperbolae aequilaterae, formula* $s = \int \frac{dv}{v} \sqrt{1+v^4}$ *exprimantur.*

Solutio.

Ponatur $vv = z^3$, eritque $\partial s = \frac{3\partial z}{2z^{\frac{5}{2}}}\sqrt{1+z^6}$; tum vero ſtatuatur

$$p = z^3 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{\sqrt{3}}{2};$$
$$q = z^2 - \tfrac{z\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2};$$

ſumtisque quadratis erit

$$pp = z^6 - z^4 + z^3\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}zz - \tfrac{z\sqrt{3}}{2} + \tfrac{3}{4}$$
$$qq = +z^4 - z^3\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}zz + \tfrac{z\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{4}$$

quorum ſumma fit

$$pp + qq = 1 + z^6.$$

Quodſi igitur curva conſtruatur, cujus coordinatae orthogonales ſint

$$x = \tfrac{3}{2}\int\frac{p\partial z}{z^{\frac{5}{2}}} \text{ et } y = \tfrac{3}{2}\int\frac{q\partial z}{z^{\frac{5}{2}}}$$

hujus curvae elementum arcus erit

$$\partial s = \tfrac{3}{2}\frac{\partial z}{z^{\frac{5}{2}}}\sqrt{pp+qq} = \frac{3\partial z}{2z^{\frac{5}{2}}}\sqrt{1+z^6}$$

quod, reſtituto loco z valore $\sqrt[3]{vv}$ abit in elementum notiſſimum arcus Hyperbolae aequilaterae $\partial s = \frac{\partial v}{vv}\sqrt{1+v^4}$. Curva autem, quam aſſignavimus, erit algebraica, quippe cujus coordinatae erunt:

$$x = z\sqrt{z} + \frac{3}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{3}}{2z\sqrt{z}};$$
$$y = 3\sqrt{z} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{2z\sqrt{z}};$$

quae concinnius per v ita exprimuntur:

$$x = v + \frac{3}{2\sqrt[3]{v}} - \frac{\sqrt{3}}{2v\sqrt[3]{v}};$$
$$y = 3\sqrt[3]{v} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{v}} + \frac{1}{2v\sqrt[3]{v}}.$$

Corol-

Corollarium.

§. 5. Hinc ſtatim intelligitur casu $z = 0$ fore $x = -\infty$ et $y = +\infty$; casu vero $z = \infty$ fore $x = +\infty$ et $y = +\infty$; variabilem z autem nunquam negativam fieri posse. Tum vero ſequitur applicatam y fore minimam ſimulque tangentem curvae axi abscissarum parallelam, ubi $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q}{p} = 0$, hoc eſt, ubi $z = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4} = 1,2622$, ideoque $x = 2,1425$. Idem porro quoque evenit ubi $z = \infty$, ideoque $x = \infty$. Casu autem $z = 1$, ubi $x = -\infty$, tangens ad axem abſcissarum inclinatur ſub angulo cujus tangens $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Nullum vero datur in curva punctum, ubi tangens lineae abscissarum normaliter inſiſtit, ideo quod fieri nequit $\frac{q}{p} = \infty$, niſi fuerit $p = 0$, hoc eſt $z^3 = \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{3}}{2}$, ſive $z = -1,126$, quo ipso utraque coordinata fieret imaginaria. Punctum autem characteriſticum flexus contrarii ibi reperietur, ubi $\frac{\partial\partial y}{\partial x} = 0$, hoc eſt ubi $z = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{67}}{4} = 3,3453$, ergo $x = 6,972$. Hujus autem puncti tangens ad lineam abscissarum inclinatur ſub angulo 12 graduum. Denique initium abſciſſarum reſpondet valori $z = 0,4960$, pro quo $x = 0$. Hinc jam figuram curvae quodammodo cognoscere licet: namque habebit duos ramos RP et RS in infinitum excurrentes, quorum prior RP aſymtota eſt praeditus CD, quae cum linea abſciſſarum AB angulum conſtituit 30 graduum In Q applicata eſt minima, in R vero punctum flexus contrarii. Cum vero, ob $z^3 = vv$, ſingulis valoribus ipſius z duo reſpondeant valores v et $-v$, ex valoribus coordinatarum per v expressis manifeſtum eſt, infra lineam AB dari curvam *pqrs* priori ſimilem et aequalem. Tab. I. Fig. 1.

Problema.

§. 6. *Aliam assignare curvam algebraicam, cujus singuli arcus, ut arcus Hyperbolae aequilaterae, hac formula* $s = \int \frac{\partial v}{vv} \sqrt{1 + v^4}$ *exprimantur.*

Solutio.

Statuatur $vv = z^5$, eritque $\partial s = \frac{5\partial z}{2z^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1 + z^{10}}$; tum vero si ponatur

$$p = z^5 - \tfrac{1}{2}z^3 - \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{2} z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) z - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$q = z^4 - \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} z^3 - \tfrac{1}{2} z^2 + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} z - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right),$$

deletis terminis se mutuo destruentibus reperietur summa quadratorum

$$pp + qq = 1 + z^{10}.$$

Si igitur curva construatur, cujus coordinatae orthogonales sint

$$x = \tfrac{5}{2} \int \frac{p\partial z}{z^{\frac{3}{2}}} \text{ et } y = \tfrac{5}{2} \int \frac{q\partial z}{z^{\frac{3}{2}}},$$

hujus curvae arcus ita exprimetur:

$$s = \tfrac{5}{2} \int \frac{\partial z}{z^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1 + z^{10}}$$

sive restituto vv loco z^5, erit $s = \int \frac{\partial v}{vv} \sqrt{1 + v^4}$.

Scholion.

§. 7. Eadem methodo, qua ad has binas solutiones perveni, etiam quotquot lubuerit alias curvas problemati satisfacientes elicere possem. Plus enim in hoc negotio laboris

boris quam difficultatis eſt, ut clarius patebit infra, dum methodum ipsam non parum abſconditam, quae me ad has curvas perduxit, fusius explicabo. Nunc autem loco expreſſionis $\int \frac{\partial v}{vv} \sqrt{1+v^4}$ aliam pro arcu Hyperbolae aequilaterae adhibebo, tam ſolutioni generali perficiendae, quam caſibus particularibus inde derivandis magis accommodatam, introducendo ſcilicet angulum, quem diameter Hyperbolae cum ejus aſymtota conſtituit. Hoc enim modo aptissimam oriri expressionem pro elemento arcus ex ſequenti problemate patebit.

Problema.

§. 8. *Invenire curvam algebraicam, cujus ſingulos arcus per arcus Hyperbolae aequilaterae metiri liceat.*

Solutio.

Sit C centrum Hyperbolae aequilaterae intra aſymtotas CB et CD contentae, in qua pro quolibet puncto Y vocemus angulum $DCY = \Phi$, lineam CY ſemidiametro aequalem $= z$, ita ut coordinatae ſint Tab. I. Fig. 2.

$$CX = X = z \cos \Phi;$$
$$XY = Y = z \sin \Phi.$$

Cum igitur rectangulum ex coordinatis factum debeat esse conſtans, ponatur $\frac{1}{2} zz \sin 2\Phi = \frac{1}{2}\Gamma$, eritque $z = \frac{\Gamma}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$, hinc $\partial z = -\frac{\Gamma \partial \Phi \cos 2\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$, unde fit elementum arcus Hyperbolae:

$$\partial S = \sqrt{\partial z^2 + zz\, \partial \Phi^2} = \frac{\Gamma \partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Curva igitur algebraica, quam quaerimus, ita debet esse com-

comparata, ut positis abscissa $= x$, applicata $= y$ et arcu $= s$, elementum arcus sit

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\Gamma \partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{1}{2}}},$$

cui conditioni sequenti modo commode satisfacere licet. Statuamus pro hac curva coordinatas orthogonales

$$x = \frac{a \cos \Phi + b \cos 3\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}},$$
$$y = \frac{-a \sin \Phi + b \sin 3\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}},$$

eritque differentiando et per $\frac{\partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$ dividendo:

$$\frac{\partial x (\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial \Phi} = \begin{cases} -\sin 2\Phi \,(a \sin \Phi + 3b \sin 3\Phi) \\ -\cos 2\Phi \,(a \cos \Phi + b \cos 3\Phi) \end{cases}$$
$$\frac{\partial y (\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial \Phi} = \begin{cases} +\sin 2\Phi \,(-a \cos \Phi + 3b \cos 3\Phi \\ -\cos 2\Phi \,(-a \sin \Phi + b \sin 3\Phi) \end{cases}$$

Per notissimas autem formularum trigonometricarum reductiones, puta:

$$\sin \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \sin (\alpha - \beta);$$
$$\cos \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2} \sin (\alpha - \beta);$$
$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta);$$
$$\sin \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta);$$

nanciscimur sequentes valores in compendium redactos:

$$\frac{\partial x (\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial \Phi} = -a \cos \Phi + b \cos 5\Phi - 2b \cos \Phi$$
$$\frac{\partial y (\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial \Phi} = -a \sin \Phi + b \sin 5\Phi - 2b \sin \Phi$$

Ponatur nunc $b = -\frac{1}{2} a = \Gamma$, eritque

$$\partial x = \frac{\Gamma \partial \Phi \cos 5\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\partial y = \frac{\Gamma \partial \Phi \sin 5\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

unde

unde fit elementum arcus curvae quaesitae

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\Gamma \partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{1}{2}}},$$

uti requiritur. Curvae igitur algebraicae, cum Hyperbola aequilatera eandem rectificationem habentis, coordinatae erunt

$$x = \frac{-2\Gamma \cos \Phi + \Gamma \cos 3\Phi}{\sqrt{\sin 3\Phi}}$$

$$y = \frac{+2\Gamma \sin \Phi + \Gamma \sin 3\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

ubi Γ denotat latus quadrati, quod aequatur rectangulo constanti ex coordinatis, bis sumto, hoc est utrivis semiaxi aequale.

Scholion 1.

§. 9. En ergo adepti sumus adhuc aliam curvam algebraicam, cujus arcus metiri licet per arcus Hyperbolae aequilaterae, haecque nova curva a binis prioribus §§ 4 et 6 inventis plane est diversa; duabus enim asymtotis inter se normalibus est praedita, ut ipsa Hyperbola, a qua tamen reipsa differt: Hyperbola enim prodiret sumendo

$$x = \frac{\Gamma \cos \Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}} \text{ et } y = \frac{\Gamma \sin \Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}}.$$

Scholion 2.

§. 10. Nunc autem perspicuum est, eodem quo hic usi sumus modo, etiam alias, adeo innumeras, hujusmodi curvas inveniri posse. Si enim curvae algebraicae coordinatae statuantur

$$x = \frac{a \cos \Phi + b \cos 3\Phi + c \cos 7\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

$$y = \frac{-a \sin \Phi + b \sin 3\Phi + c \sin 7\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

differentiando pro ∂x et ∂y ejusmodi prodibunt valores, ex quibus facile erit angulos Φ et 5Φ e medio tollere, ita ut tan-

tantum ſuperſint $\sin 9\Phi$ et $\cos 9\Phi$, quorum quadratorum ſumma cum ſit unitati aequalis, elementum arcus curvae quaeſitae erit $\partial s = \frac{\Gamma \partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$, et coëfficientes a, b, c in coordinatarum expressiones fictas introductae per conſtantem Γ prodibunt expressae. Idem eveniet ſi pro curva ſtatuatur:

$$x = \frac{a\cos\Phi + b\cos 3\Phi + c\cos 7\Phi + d\cos 11\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$
$$y = \frac{-a\sin\Phi + b\sin 3\Phi + c\sin 7\Phi + d\sin 11\Phi}{\sqrt{\sin 2\Phi}},$$

et ita porro. Omnes hos casus diverſos ſequenti problemate generali complectar.

Problema.

§. 11. *Invenire innumeras curvas algebraicas, quarum ſingulos arcus per arcus Hyperbolae aequilaterae metiri liceat.*

Solutio.

Pro curvis algebraicis quaeſitis, eandem cum Hyperbola aequilatera rectificationem habentibus, ſtatuamus coordinatas orthogonales:

$$x = \frac{a\cos\Phi + b\cos 3\Phi + c\cos 7\Phi + d\cos 11\Phi + etc.}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$
$$y = \frac{-a\sin\Phi + b\sin 3\Phi + c\sin 7\Phi + d\sin 11\Phi + etc.}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

ſumtisque differentialibus, ſi per $\frac{\partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$ dividamus, nanciscemur

$$\frac{\partial x (\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$
$$\left\{\begin{array}{l} -\sin 2\Phi\,(a\sin\Phi + 3b\sin 3\Phi + 7c\sin 7\Phi + 11d\sin 11\Phi + etc. \\ -\cos 2\Phi\,(a\cos\Phi \quad b\cos 3\Phi + c\cos 7\Phi + d\cos 11\Phi + etc. \end{array}\right\}$$
$$\frac{\partial y \sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$
$$\left\{\begin{array}{l} +\sin 2\Phi\,(-a\cos\Phi + 3b\cos 3\Phi + 7c\cos 7\Phi + 11d\cos 11\Phi + etc. \\ -\cos 2\Phi\,(-a\sin\Phi + b\sin 3\Phi + c\sin 7\Phi + d\sin 11\Phi + etc. \end{array}\right\}$$

Evol-

Evolvendo igitur, et in ſubſidium vocando reductiones formularum trigonometricarum jam ſupra §. 4. usurpatas, prodibit:

$$\frac{2\,\partial x\,(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -a\cos\Phi + a\cos 3\Phi + 3b\cos 5\Phi + 7c\cos 9\Phi + 11d\cos 13\Phi + \text{etc.} \\ -3b\cos\Phi \quad\quad - 7c\cos 5\Phi - 11d\cos 9\Phi - 15e\cos 13\Phi - \text{etc.} \\ -a\cos\Phi - a\cos 3\Phi - b\cos 5\Phi - c\cos 9\Phi - d\cos 13\Phi - \text{etc.} \\ -b\cos\Phi \quad\quad - c\cos 5\Phi - d\cos 9\Phi - e\cos 13\Phi - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$\frac{2\,\partial y\,(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -a\sin\Phi - a\sin 3\Phi + 3b\sin 5\Phi + 7c\sin 9\Phi + 11d\sin 13\Phi + \text{etc.} \\ -3b\sin\Phi \quad\quad - 7c\sin 5\Phi - 11d\sin 9\Phi - 15e\sin 13\Phi - \text{etc.} \\ -a\sin\Phi + a\sin 3\Phi - b\sin 5\Phi - c\sin 9\Phi - d\sin 13\Phi - \text{etc.} \\ -b\sin\Phi \quad\quad - c\sin 5\Phi - d\sin 9\Phi - e\sin 13\Phi - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Hinc autem, collectis terminis homologis, per binarium dividendo assequimur:

$$\frac{\partial x\,(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -a\cos\Phi + b\cos 5\Phi + 3c\cos 9\Phi + 5d\cos 13\Phi + 7e\cos 17\Phi + \text{etc.} \\ -2b\cos\Phi - 4c\cos 5\Phi - 6d\cos 9\Phi - 8e\cos 13\Phi - 10f\cos 17\Phi - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial y\,(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -a\sin\Phi + b\sin 5\Phi + 3c\sin 9\Phi + 5d\sin 13\Phi + 7e\sin 17\Phi + \text{etc.} \\ -2b\sin\Phi - 4c\sin 5\Phi - 6d\sin 9\Phi - 8e\sin 13\Phi - 10f\sin 17\Phi - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

unde quotquot lubuerit curvas diversas problemati propoſito ſatisfacientes eruere licet, prout ſcilicet vel $3c$, vel $5d$, vel $7e$, vel $9f$, etc. pro ultimo coëfficiente ſumatur, ipſique Γ aequalis ponatur, termini vero hunc ultimum praecedentes ad nihilum redigantur, quo ipso priores coëfficientes determinabuntur, et resultabunt coordinatae curvarum algebraicarum, quarum arcus, aeque ac arcus Hyperbolae aequilaterae, formula $\int\frac{\Gamma\,\partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$ exprimentur.

Corollarium 1.

§. 12. Ita si fuerit c ultimus coëfficiens, ita ut sit $d = 0$; $e = 0$; $f = 0$; etc. posito $c = \frac{\Gamma}{3}$, $b = \frac{4\Gamma}{3}$, $a = -\frac{8\Gamma}{3}$, habebimus

$$\partial x = \frac{\Gamma \partial \Phi \cos 9\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\partial y = \frac{\Gamma \partial \Phi \sin 9\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}};$$

ideoque $\partial s = \frac{\Gamma \partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$; elementum curvae algebraicae, cujus coordinatae sunt

$$x = -\frac{8\Gamma \cos\Phi + 4\Gamma \cos 3\Phi + \Gamma \cos 7\Phi}{3\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

$$y = +\frac{8\Gamma \sin\Phi + 4\Gamma \sin 3\Phi + \Gamma \sin 7\Phi}{3\sqrt{\sin 2\Phi}}.$$

Corollarium 2.

§. 13. Simili modo, si fuerit d ultimus coëfficiens, ita ut $e = 0$; $f = 0$; $g = 0$; etc. sumto $d = \frac{\Gamma}{5}$; $c = \frac{2\Gamma}{5}$; $b = \frac{8\Gamma}{5}$; $a = -\frac{16\Gamma}{5}$, habebimus:

$$\partial x = \frac{\Gamma \partial \Phi \cos 13\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\partial y = \frac{\Gamma \partial \Phi \sin 13\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}};$$

adeoque $\partial s = \frac{\Gamma \partial \Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$, pro elemento arcus curvae algebraicae, cujus coordinatae sunt

$$x = -\frac{16\Gamma \cos\Phi + 8\Gamma \cos 3\Phi + 2\Gamma \cos 7\Phi + \Gamma \cos 11\Phi}{5\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

$$y = +\frac{16\Gamma \sin\Phi + 8\Gamma \sin 3\Phi + 2\Gamma \sin 7\Phi + \Gamma \sin 11\Phi}{5\sqrt{\sin 2\Phi}}.$$

Scho-

Scholion.

§. 14. Hoc igitur modo quotquot lubuerit curvas algebraicas, cum Hyperbola aequilatera eadem rectificatione gaudentes, ex noſtra ſolutione generali, ſine ulla difficultate derivare licet. Quod ſi autem nunc problema ad Hyperbolas ſcalenas extendere et ejusmodi curvas algebraicas quaerere velimus, quae cum Hyperbola qualibet obliquangula eandem rectificationem habeant; ante omnia convenit ex numero formularum, quibus elementum arcus Hyperbolae indefiniti exprimitur, eam ſeligere, quae prae ceteris ad hunc ſcopum eſt accommodata. Poſt varia autem tentamina, hunc in finem inſtituta, deprehendi, formulam ex amplitudine arcus Hyperbolici deductam maxime ad hoc esse idoneam, cui ergo ſolutio ſequentis problematis innititur.

Problema.

§. 15. *Invenire innumeras curvas algebraicas, quarum ſingulos arcus per arcus hyperbolicos metiri licet.*

Solutio.

Sint a et b ſemiaxes Hyperbolae, cujus centrum in C, vertex in A, poſitisque coordinatis $CX = X$, $XY = Y$, erit aequatio $Y = \frac{b}{a}\sqrt{XX - aa}$. Vocetur arcus $AY = S$, ductaque Normali YN fit amplitudo arcus AY, hoc eſt angulus $ANY = \omega$, ita ut ſit $\partial X = \partial S \sin\omega$ et $dY = \partial S \cos\omega$; unde ob $\partial Y = \frac{b}{a} \cdot \frac{X\partial X}{\sqrt{XX - aa}}$, fit $\cot\omega = \frac{bX}{a\sqrt{XX - aa}}$. Tab. I. Fig. 3.

Cum igitur ſit

$$\partial S = \frac{\partial X \sqrt{aa + bb : XX - a^4}}{a\sqrt{XX - aa}}$$

ob $X = \frac{aa\cot\omega}{\sqrt{aa\cot\omega^2 - bb}}$, fiet hoc elementum

$$\partial S = \frac{aabb\partial\omega}{\sin\omega^3 (aa\cot\omega^2 - bb)^{\frac{3}{2}}}$$

quod etiam ita repraesentari potest:

$$\partial S = \frac{aa\,bb\,\partial\omega}{\left(\frac{aa-bb}{2} + \frac{aa+bb}{2}\cos 2\omega\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hinc si brevitatis gratia ponatur

$$\frac{aa\,bb}{\left(\frac{aa+bb}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \Delta \text{ et } \frac{aa-bb}{aa+bb} = \varrho$$

elementum arcus hyperbolici ita concinne per amplitudinem prodit expressum:

$$\partial S = \frac{\Delta\,\partial\omega}{(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

atque haec est formula solutioni nostri problematis prae ceteris accommodata.

Statuantur nunc coordinatae curvae algebraicae quaesitae:

$$x = \frac{A\cos\omega - B\cos 3\omega + C\cos 5\omega - D\cos 7\omega - etc.}{\sqrt{\varrho + \cos 2\omega}}$$

$$y = \frac{a\sin\omega + b\sin 3\omega + c\sin 5\omega + d\sin 7\omega + etc.}{\sqrt{\varrho + \cos 2\omega}}$$

et quo differentiatio commodius institui queat, notetur esse in genere:

$$\partial . \frac{\cos\lambda\omega}{\sqrt{\varrho + \cos 2\omega}} =$$

$$-\frac{\partial\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}\left(-\lambda\varrho\sin\lambda\omega - \left(\tfrac{\lambda-1}{2}\right)\sin(\lambda+2)\omega - \left(\tfrac{\lambda+1}{2}\right)\sin(\lambda-1)\omega\right)$$

$$\partial . \frac{\sin\lambda\omega}{\sqrt{\varrho + \cos 2\omega}} =$$

$$-\frac{\partial\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}\left(\lambda\varrho\cos\lambda\omega + \left(\tfrac{\lambda-1}{2}\right)\cos(\lambda+2)\omega + \left(\tfrac{\lambda+1}{2}\right)\cos(\lambda-2)\omega\right).$$

Harum formularum subsidio reperitur:

$$\frac{\partial x\,(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\partial\omega} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -A\varrho\sin\omega - 3B\varrho\sin 3\omega - 5C\varrho\sin 5\omega - 7D\varrho\sin 7\omega - etc. \\ +A\sin\omega \quad\quad - B\sin 5\omega - 2C\sin 7\omega - etc. \\ -2B\sin\omega - 3C\sin 3\omega - 4D\sin 5\omega - 5E\sin 7\omega - etc. \end{array}\right\}$$

∂y

$$\frac{\partial y\,(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\partial \omega} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +a\varrho\cos\omega+3b\varrho\cos 3\omega+5c\varrho\cos 5\omega+7d\varrho\cos 7\omega+\text{etc.} \\ +a\cos\omega\qquad\quad+b\cos 5\omega+2c\cos 7\omega+\text{etc.} \\ +2b\cos\omega+3c\cos 3\omega+4d\cos 5\omega+5e\cos 7\omega+\text{etc.} \end{array}\right\}$$

unde porro quotquot luhuerit curvas algebraicas problemati fatisfacientes derivare poterimus, prout nempe vel C et c, vel D et d, vel E et e, vel F et f, et ita porro, pro ultimis coëfficientibus assumantur, termini vero ultimum praecedentes ad nihilum redigantur, quo ipso species Hyperbolae eandem cum curva algebraica rectificationem habentis, simulque coëfficientes priores determinabuntur, ac elicientur coordinatae, verae pro fictis, curvarum algebraicarum, quarum arcus, aeque ac arcus Hyperbolae, formula illa $\int \frac{\Delta\,\partial\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$ exprimentur. Ubi adhuc pro natura Hyperbolae notasse juvabit fore tang $BCE = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1\pm\varrho}{1+\varrho}}$.

Corollarium.

§. 16. Sint C et c ultimi coëfficientes, hoc eſt $D = d = o$; $E = e = o$; $F = f = o$; et ita porro, ita ut habeamus pro hoc casu:

$$\frac{\partial x\,(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\partial \omega} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -A\varrho\sin\omega-3B\varrho\sin 3\omega-5C\varrho\sin 5\omega \\ +A\sin\omega\qquad\quad-B\sin 5\omega-2C\sin 7\omega \\ -2B\sin\omega-3C\sin 3\omega \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial y\,(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\partial \omega} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +a\varrho\cos\omega+3b\varrho\cos 3\omega+5c\varrho\cos 5\omega \\ +a\cos\omega\qquad\quad+b\cos 5\omega+2c\cos 7\omega \\ +2b\cos\omega+3c\cos 3\omega \end{array}\right\}$$

Hinc

Hinc autem sequentes consequimur conditiones pro determinandis coefficientibus:

I. $2C = -\Delta$;	1. $2c = \Delta$;
II. $5C\varrho + B = 0$;	2. $5c\varrho + b = 0$;
III. $3B\varrho + 3C = 0$;	3. $3b\varrho + 3c = 0$;
IV. $A(1-\varrho) + 2B = 0$;	4. $a(1+\varrho) + 2b = 0$.

Ex I et 1 fit $C = -\frac{\Delta}{2}$ et $c = +\frac{\Delta}{2}$.
Ex III et 3 fit $B = \frac{\Delta}{2\varrho}$ et $b = -\frac{\Delta}{2\varrho}$.
Ex II et 2 fit $\varrho = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\varrho = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Ex IV et 4 fit $A = \frac{\Delta}{\varrho(1-\varrho)}$ et $a = \frac{\Delta}{\varrho(1+\varrho)}$.

His ita definitis erit

$$\partial x = \frac{\Delta\partial\omega \sin 7\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \partial y = \frac{\Delta\partial\omega \cos 7\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

coordinatae ipsae autem erunt

$$x = \frac{2\Delta\cos\omega + \Delta(1-\varrho)\cos 3\omega - \Delta\varrho(1-\varrho)\cos 5\omega}{2\varrho(1-\varrho)\sqrt{\varrho+\cos 2\omega}}$$

$$y = \frac{2\Delta\sin\omega - \Delta(1+\varrho)\sin 3\omega + \Delta\varrho(1+\varrho)\sin 5\omega}{2\varrho(1+\varrho)\sqrt{\varrho+\cos 2\omega}}$$

existente $\varrho = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et angulo $BCE = 31^\circ, 43'$, vel etiam $BCE = 58^\circ, 17'$. Ceterum coordinatas curvae quaesitae etiam sequenti modo exprimere licet. Cum fiat:

Ex I et 1:	$C = -\frac{\Delta}{2}$ et $c = +\frac{\Delta}{2}$;
Ex II et 2:	$B = +\frac{5}{2}\Delta\varrho$ et $b = -\frac{5}{2}\Delta\varrho$;
Ex III et 3:	$\varrho = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\varrho = \frac{1}{\sqrt{5}}$;
Ex IV et 4:	$A = \frac{5\Delta\varrho}{1-\varrho}$ et $a = +\frac{5\Delta\varrho}{1+\varrho}$.

inde exoritur

$$x = \frac{10\Delta\varrho\sin\omega - 5\Delta\varrho(1-\varrho)\sin 3\omega - \Delta(1-\varrho)\cos 5\omega}{2(1-\varrho)\sqrt{\varrho+\cos 2\omega}}$$

$$y = +\frac{10\Delta\varrho\sin\omega - 5\Delta\varrho(1+\varrho)\sin 3\omega + \Delta(1+\varrho)\sin 5\omega}{2(1+\varrho)\sqrt{\varrho+\cos 2\omega}}$$

quae

quae autem, ob $\varrho = \frac{1}{\sqrt{5}}$, a praecedentibus plane non differunt.

Corollarium 2.

§. 17. Sint D et d ultimi coëfficientes, hoc est $E = e = 0$; $F = f = 0$; $G = g = 0$; et ita de reliquis, unde habebimus:

$$\frac{\partial x\,(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\partial \omega} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -A\varrho \sin\omega - 3B\varrho \sin 3\omega - 5C\varrho \sin 5\omega - 7D\varrho \sin 7\omega \\ +A \sin\omega \qquad\qquad - B \sin 5\omega - 2C \sin 7\omega - 3D \sin 9\omega \\ -B \sin\omega - 3C \sin 3\omega - 4D \sin 5\omega \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial y\,(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\partial \omega} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +a\varrho \cos\omega + 3\varrho \cos 3\omega + 5c\varrho \cos 5\omega + 7d\varrho \cos 7\omega \\ +a \cos\omega \qquad\qquad + b \cos 5\omega + 2c \cos 7\omega + 3d \cos 9\omega \\ +2b \cos\omega + 3c \cos 3\omega + 4d \cos 5\omega \end{array}\right\}$$

conditiones autem problematis, unde coëfficientes determinantur, sunt.

I.	$3D = -\Delta$;	1. $3d = \Delta$;
II.	$7D\varrho + 2C = 0$;	2. $7d\varrho + 2c = 0$;
III.	$5C\varrho + B + 4D = 0$;	3. $5c\varrho + b + 4d = 0$;
IV.	$3B\varrho + 3C = 0$;	4. $3b\varrho + 3c = 0$;
V.	$A(1-\varrho) - 2B = 0$;	5. $a(1+\varrho) + 2b = 0$.

Ex I et 1 fit $D = -\frac{\Delta}{3}$ et $d = +\frac{\Delta}{3}$.
Ex II et 2 -- $C = +\frac{7}{6}\Delta\varrho$ et $c = -\frac{7}{6}\Delta\varrho$.
Ex IV et 4 -- $B = -\frac{7}{6}\Delta$ et $b = +\frac{7}{6}\Delta$.
Ex III et 3 -- $\varrho = \sqrt{\frac{3}{7}}$ et $\varrho = \sqrt{\frac{3}{7}}$.
Ex V et 5 -- $A = -\frac{7\Delta}{3(1-\varrho)}$ et $a = -\frac{7\Delta}{3(1+\varrho)}$.

His

His ita definitis erit

$$\partial x = \frac{\Delta \partial\omega \sin 9\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \partial y = \frac{\Delta \partial\omega \cos 9\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

ideoque $\partial s = \frac{\Delta \partial\omega'}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$. Coordinatae autem ipsius curvae quaesitae erunt

$$x = -\frac{14\Delta\cos\omega - 7\Delta(1-\varrho)\cos 3\omega + 7\Delta\varrho(1-\varrho)\cos 5\omega - 2\Delta(1-\varrho)\cos 7\omega}{6(1-\varrho)\sqrt{\varrho+\cos 2\omega}}$$

$$y = -\frac{14\Delta\sin\omega + 7\Delta(1+\varrho)\sin 3\omega - 7\Delta\varrho(1+\varrho)\sin 5\omega + 2\Delta(1+\varrho)\sin 7\omega}{6(1+\varrho)\sqrt{\varrho+\cos 2\omega}}$$

Pro Hyperbola autem, ob $\varrho = \sqrt{\frac{3}{1}}$, erit angulus $BCE = 65°, 26'$, vel etiam $BCE = 24°, 34'$.

Corollarium 3.

§. 18. Sint E et e ultimi coëfficientes, eruntque formulae reducendae atque per $\frac{\partial\omega}{(\varrho+\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicandae sequentes:

Pro ∂x

$$\left\{\begin{array}{l} -A\varrho\sin\omega - 3B\varrho\sin 3\omega - 5C\varrho\sin 5\omega - 7D\varrho\sin 7\omega - 9E\varrho\sin 9\omega \\ +A\sin\omega - B\sin 5\omega - 2C\sin 7\omega - 3D\sin 9\omega - 4E\sin 11\omega \\ -2B\sin\omega - 3C\sin 3\omega - 4D\sin 5\omega - 5E\sin 7\omega \end{array}\right\}$$

Pro ∂y

$$\left\{\begin{array}{l} +a\varrho\cos\omega + 3b\varrho\cos 3\omega + 5c\varrho\cos 5\omega + 7d\varrho\cos 7\omega + 9e\varrho\cos 9\omega \\ +a\cos\omega + b\cos 5\omega + 2c\cos 7\omega + 3d\cos 9\omega + 4e\cos 11\omega \\ +2b\cos\omega + 3c\cos 3\omega + 4d\cos 5\omega + 5e\cos 7\omega \end{array}\right\}$$

ex quibus sequentes fluunt determinationes:

$$E = -\frac{\Delta}{4} \qquad e = +\frac{\Delta}{4}$$

$$D = \frac{3D\varrho}{4} \qquad d = +\frac{3\Delta\varrho}{4}$$

$$C = -\frac{21\Delta\varrho\varrho + 5\Delta}{8} \qquad c = \frac{21\Delta\varrho\varrho - 3\Delta}{8}$$

$$B = \frac{21\Delta\varrho\varrho - 5\Delta}{8\varrho} \qquad b = -\frac{21\Delta\varrho\varrho + 5\Delta}{8\varrho}$$

$$A = \frac{21\Delta\varrho\varrho - 5\Delta}{4\varrho(1-\varrho)} \qquad a = \frac{21\Delta\varrho\varrho - 5\Delta}{4\varrho(1+\varrho)}$$

exiſtente

exiſtente $\varrho = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, hoc eſt $\varrho = 0,7651$, vel etiam $\varrho = 0,2852$. Tum autem erit

$$\partial x = \frac{\Delta\,\partial\omega \sin \Pi\omega}{(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \partial y = \frac{\Delta\,\partial\omega \cos \Pi\omega}{(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

hincque, uti requiritur, $\partial s = \frac{\Delta\,\partial\omega}{(\varrho + \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}$, coordinatae vero curvae quaeſitae ſunt:

$$x = \frac{A\cos\omega + B\cos 3\omega + C\cos 5\omega + D\cos 7\omega}{\sqrt{\varrho + \cos 2\omega}}$$

$$y = \frac{a\sin\omega + b\sin 3\omega + c.\sin 5\omega + d\sin 7\omega}{\sqrt{\varrho + \cos 2\omega}}$$

et pro Hyperbola eandem rectificationem habente vel angulus $BCE = 69^\circ, 57'$, vel $BCE = 53^\circ, 17'$, vel etiam angulus BCE complementis horum angulorum aequalis.

Corollarium 4.

§ 19. Applicemus noſtram ſolutionem generalem quoque ad Hyperbolam aequilateram, quod fit ponendo $b = a$ et angulum $BCE = 45^\circ$; tum autem fit ſubnormalis $XN = CX = X$, ideoque angulus $XNY = XCY$, hoc eſt $\omega = 45^\circ - \Phi$; tum vero $\varrho = 0$ et $\Delta = a = \Gamma$, unde fit elementum Hyperbolae $\partial S = \frac{\Gamma\,\partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$, ut ſupra. Pro curvis autem eadem rectificatione gaudentibus ex § 15 fiet:

$$\frac{\partial x\,(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial\Phi} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +A\sin(45^\circ - \Phi) \\ -2B\sin(45^\circ - \Phi) - 3C\sin(135^\circ - 3\Phi) \\ \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} -B\sin(225^\circ - 5\Phi) - 2C\sin(315^\circ - 7\Phi) - etc. \\ -4D\sin(225^\circ - 5\Phi) - 5E\sin(315^\circ - 7\Phi) - etc. \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial y\,(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}{\partial \Phi} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \zeta + a\cos(45^\circ - \Phi) + b\cos(225^\circ - 5\Phi) + 2c\cos(315^\circ - 7\Phi) + etc. \\ \zeta + 2b\cos(45^\circ - \Phi) + 3c\cos(135^\circ - 3\Phi) + 4d\cos(225^\circ - 5\Phi) + 5e\cos(315^\circ - 7\Phi) + etc. \end{array}\right\}$$

ipsae vero coordinatae erunt

$$x = \frac{A\cos(45^\circ - \Phi + B\cos(135^\circ - 3\Phi) + C\cos(225^\circ - 5\Phi) + etc}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

$$y = \frac{a\sin(45^\circ - \Phi) + b\sin(135^\circ - 3\Phi) + c\cos(225^\circ - 5\Phi) + etc.}{\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

ubi coëfficientes determinabuntur ex conditione quod fieri debeat $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{r\,\partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$.

Scholion.

§. 20. Primo intuitu videri posset, hanc solutionem curvas praebere ab iis, quas prima solutio, § 11 data, complectitur, plane diversas, ideo quod in illa anguli Φ multipla $5\Phi, 9\Phi, 13\Phi \ldots (4n+1)\Phi$, non occurrunt. Verum hic ista multipla quoque ex calculo egrediuntur, idque ob ipsam problematis proprietatem primariam, qua fieri debet $\partial s = \frac{r\,\partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$. Nisi enim coëfficientes terminorum multipla $(4n+1)$ complectentium, in expressionibus fictis coordinatarum, nihilo aequales statuantur, differentialia ∂x et ∂y nunquam ad unicum terminum reduci possunt, neque elementum arcus ∂s ad formam propositam $\frac{r\,\partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$ redigitur.

Ponantur igitur coëfficientes $\left\{\begin{array}{l} C, E, G, I, L, \text{etc.} \\ c, e, g, i, l, \text{etc.} \end{array}\right.$

nihilo

nihilo aequales, reliquorum vero sint D et d ultimi, fieri que debebit:

$$\begin{array}{l|l} D = -\frac{\Gamma}{3} & d = +\frac{\Gamma}{3} \\ B = -4D = +\frac{4}{3}\Gamma & b = +4d = -\frac{4}{3}\Gamma \\ A = +2B = +\frac{8}{3}\Gamma & a = -2b = +\frac{8}{3}\Gamma \end{array}$$

quibus ita determinatis erit

$$\partial x = \frac{\Gamma \partial\Phi \sin(405^\circ - 9\Phi)}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial y = \frac{\Gamma \partial\Phi \cos(405^\circ - 9\Phi)}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

adeoque $\partial s = \frac{\Gamma \partial\Phi}{(\sin 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}$, ipsaeque coordinatae erunt:

$$x = \frac{8\Gamma \cos(45^\circ - \Phi) + 4\Gamma \cos(135^\circ - 3\Phi) - \Gamma \cos(315^\circ - 7\Phi)}{3\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

$$y = \frac{8\Gamma \sin(45^\circ - \Phi) - 4\Gamma \sin(135^\circ - 3\Phi) + \Gamma \sin(315^\circ - 7\Phi)}{3\sqrt{\sin 2\Phi}}$$

quae curva ab illa, quam supra § 12 invenimus, non aliter differt, nisi quod axis et initium abscissarum sint mutati, id quod etiam de omnibus reliquis curvis, in nostro corollario quarto contentis, est tenendum.

Scholion 2.

§. 21. Supereſt ut promissum solvam et methodum breviter exponam, quae mihi ad binas solutiones initio § 4 et 6 prolatas, viam stravit. Hanc quidem methodum, post inventam solutionem § 15 exhibitam non ulterius sum prosecutus, quoniam non satis commode curvas praebere videbatur cum Hyperbolis scalenis, quoad rectificationem, comparabiles. Cum autem expressiones pro coordinatis curva-

rum problemati, Hyperbolam aequilateram spectanti, satisfacientium, § 4 et 6 exhibitae, fingularis fint indolis et formae, mihi persuasum eft, neminem fore lectorum, qui non cupiat fcire, quonam modo, quibusque ratiociniis ad has folutiones pervenerim.

Expositio methodi
qua binas solutiones §. 4 et 6 datas consecutus sum.

Tab. I. Fig. 4. §. 22. Sumtis abscissis CV super asymtota CD, a centro C, applicatis vero VY alteri asymtotae CB parallelis, conftat esse $CV \cdot VY = AE^2 = \frac{aa + bb}{4}$. Ponamus autem $AE = 1$ et angulum $BCD = \nu$; tum vero fit $CV = u$, $VY = v$; $CX = X$, $XY = Y$, eritque $u = \frac{1}{v}$, $VX = v \cos \nu$, $XY = v \sin \nu$, hincque coordinatae orthogonales erunt

$$X = \frac{1}{v} + v \cos \nu \text{ et } Y = v \sin \nu$$

earumque differentialia

$$\partial X = -\frac{\partial v}{vv} + \partial v \cos \nu \text{ et } \partial Y = \partial v \sin \nu$$

unde porro fit elementum arcus Hyperbolae

$$\partial S = \frac{\partial v}{vv} \sqrt{1 - 2vv \cos \nu + v^4}.$$

§. 23. Statuatur nunc $vv = z^n$, ut elementum modo inventum in hanc formam abeat noftro inftituto magis accommodatam:

$$\partial S = \frac{n \partial z}{2 z^{\frac{n}{2}+2}} \sqrt{1 - 2z^n \cos \nu + z^{2n}}$$

atque evidens eft, fi pro curvis quaefitis ftatuantur coordinarae

natae orthogonales

$$x = \frac{n}{2}\int \frac{p\partial z}{z^{\frac{n+2}{2}}} \text{ et } y = \frac{n}{2}\int \frac{q\partial z}{z^{\frac{n+2}{2}}}$$

elementum arcus quoque fore

$$\partial s = \frac{n\partial z}{2z^{\frac{n+2}{2}}}\sqrt{1 - 2z^n\cos\nu + z^{2n}}$$

dummodo p et q ita accipiantur, ut fiat

$$pp + qq = 1 - 2z^n\cos\nu + z^{2n}$$

tum vero, curvas semper fore algebraicas, quicunque numerus integer pro n capiatur, dummodo fuerit impar.

§. 24. Pro inveſtigandis autem valoribus p et q, notetur formulam $1 - 2z^n\cos\nu + z^{2n}$ habere n factores duplices, seu trinomiales, formae $1 - 2z\cos\frac{2i\pi \pm \nu}{n} + zz$, quorum quemlibet in duo quadrata $(z - \cos\frac{2i\pi \pm \nu}{2})^2$ et $(\sin\frac{2i\pi \pm \nu}{n})^2$, ideoque etiam in duos factores ſimplices;

$$z - \cos\frac{2i\pi \pm \nu}{n} + \sin\frac{2i\pi \pm \nu}{n}\sqrt{-1}$$
$$z - \cos\frac{2i\pi \pm \nu}{n} - \sin\frac{2i\pi \pm \nu}{n}\sqrt{-1}$$

reſolvere licet. Ita ſi angulos in his factoribus occurrentes hoc modo deſignemus: $\frac{\nu}{n} = \alpha$; $\frac{2\pi - \nu}{n} = \beta$; $\frac{2\pi + \nu}{n} = \gamma$; $\frac{4\pi - \nu}{n} = \delta$; $\frac{4\pi + \nu}{n} = \varepsilon$; $\frac{6\pi - \nu}{n} = \zeta$; $\frac{6\pi + \nu}{n} = \eta$; etc. factores erunt:

$zz - 2z\cos\alpha + 1 = (z - \cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})(z - \cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{-1})$
$zz - 2z\cos\beta + 1 = (z - \cos\beta + \sin\beta\sqrt{-1})(z - \cos\beta - \sin\beta\sqrt{-1})$
$zz - 2z\cos\gamma + 1 = (z - \cos\gamma + \sin\gamma\sqrt{-1})(z - \cos\gamma - \sin\gamma\sqrt{-1})$
etc. etc.

quorum factorum ſimplicium ſi anteriores et posteriores ſe-

orſim

orſim in ſe invicem ducantur, tum vero cujusque producti pars realis vocetur p, imaginaria vero $q\sqrt{-1}$, fiet

$$1 - 2z^n \cos\nu + z^{2n} = (p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1}) = pp+qq$$

exiſtente

$$p = z^n - Az^{n-1} + Bz^{n-2} - Cz^{n-3} + Dz^{n-4} - \text{etc.}$$
$$q = \mathfrak{A}z^{n-1} - \mathfrak{B}z^{n-2} + \mathfrak{C}z^{n-3} - \mathfrak{D}z^{n-4} + \text{etc.}$$

ubi ſcilicet A eſt ſumma cosinuum angulorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. $\mathfrak{A}$ vero ſumma ſinuum; B ſumma cosinuum et $\mathfrak{B}$ ſumma ſinuum ſummae ex binis; C ſumma cosinuum et $\mathfrak{C}$ ſumma ſinuum ſummae ex ternis, et ita porro.

Evolutio casus

quo $\nu = -90^\circ$ et $n = 3$.

§. 25. Hic igitur elementum arcus Hyperbolae erit $\partial S = \frac{3\partial z}{2z^{\frac{5}{2}}}\sqrt{1+z^6}$, ubi quantitas $1+z^6$, tres tantum habet factores trinomiales, pro quibus anguli erunt:

$$\alpha = -30^\circ;\ \beta = 150^\circ;\ \gamma = 90^\circ.$$

unde porro nanciſcimur ſequentes valores:

$$A = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0;$$
$$\mathfrak{A} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1;$$
$$B = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\beta+\gamma) = -\tfrac{1}{2};$$
$$\mathfrak{B} = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\beta+\gamma) = +\tfrac{\sqrt{3}}{2};$$
$$C = \cos(\alpha+\beta+\gamma) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\mathfrak{C} = \sin(\alpha+\beta+\gamma) = -\tfrac{1}{2}.$$

Hinc

Hinc igitur colligitur fore

$$p = z^3 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{\sqrt{3}}{2};$$
$$q = z^2 - \tfrac{z\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2};$$

ii ipſi valores, quos supra § 4 his litteris tribuimus, et ex quibus coordinatas curvae derivavimus, cujus arcus eadem formula $\partial s = \frac{3\partial z}{2z^{\frac{5}{2}}}\sqrt{1+z^6}$ exprimuntur.

Potuissemus etiam sumere $\frac{\nu}{3} = +90°$; tum enim pro p et q prodiissent valores

$$p = z^3 - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$q = z^2 + \tfrac{z\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}$$

unde quoque fit $pp + qq = 1 + z^6$, et curva problemati satisfaciens resultat, cujus coordinatae ita se habent:

$$x = z\sqrt{z} + \tfrac{3}{2\sqrt{z}} + \tfrac{\sqrt{3}}{2z\sqrt{z}};$$
$$y = 3\sqrt{z} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{z}} + \tfrac{1}{2z\sqrt{z}}.$$

quarum ope curvae puncta praecipua facile determinari possunt.

Evolutio casus
quo $\nu = -90°$ et $n = 5$.

§. 26. Hic igitur elementum arcus Hyperbolae aequilaterae erit $\partial S = \frac{5\partial z}{2z^{\frac{7}{2}}}\sqrt{1+z^{10}}$, ubi igitur quantitas post ſignum radicale quinque habebit factores trinomiales, pro quibus

quibus quinque anguli erunt

$\alpha = -18^\circ;\ \beta = 90^\circ;\ \gamma = 54^\circ;\ \delta = 162^\circ;\ \varepsilon = 126^\circ;$

coëfficientes vero in expressiones pro p et q introducti hoc casu erunt X sequentes

$$\mathfrak{A} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta + \cos\varepsilon$$

hoc est:

I $\mathfrak{A} = 0$

$$\mathfrak{A} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta + \sin\varepsilon$$

hoc est:

II $\mathfrak{A} = 1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = {} & \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\alpha+\varepsilon) \\ & + \cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta+\delta) + \cos(\beta+\varepsilon) \\ & + \cos(\gamma+\delta) + \cos(\gamma+\varepsilon) + \cos(\delta+\varepsilon)\end{aligned}$$

hoc est:

III $\mathfrak{B} = \cos 72^\circ - \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = {} & \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\alpha+\varepsilon) \\ & + \sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta+\delta) + \sin(\beta+\varepsilon) \\ & + \sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma+\varepsilon) + \sin(\delta+\varepsilon)\end{aligned}$$

hoc est:

IV $\mathfrak{C} = \sin 72^\circ + \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = {} & \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\delta) + \cos(\alpha+\beta+\varepsilon) \\ & + \cos(\alpha+\gamma+\delta) + \cos(\alpha+\gamma+\varepsilon) + \cos(\alpha+\delta+\varepsilon) \\ & + \cos(\beta+\gamma+\delta) + \cos(\beta+\gamma+\varepsilon) + \cos(\beta+\delta+\varepsilon) \\ & + \cos(\gamma+\delta+\varepsilon)\end{aligned}$$

hoc est:

hoc eſt:

$$\text{V}\quad C = -\cos 18 - \cos 54 = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = -\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = {} & \sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\delta) + \sin(\alpha+\beta+\varepsilon) \\ & + \sin(\alpha+\gamma+\delta) + \sin(\alpha+\gamma+\varepsilon) + \sin(\alpha+\delta+\varepsilon) \\ & + \sin(\beta+\gamma+\delta) + \sin(\beta+\gamma+\varepsilon) + \sin(\beta+\delta+\varepsilon) \\ & + \sin(\gamma+\delta+\varepsilon)\end{aligned}$$

id eſt:

$$\text{VI}\quad \mathfrak{C} = \sin 18^\circ - \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}D = {} & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \cos(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon) \\ & + \cos(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon) + \cos(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon) \\ & + \cos(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\end{aligned}$$

id eſt:

$$\text{VII}\quad D = -\cos 36^\circ = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} = {} & \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \sin(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon) \\ & + \sin(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon) + \sin(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon) \\ & + \sin(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\end{aligned}$$

id eſt:

$$\text{VIII}\quad \mathfrak{D} = -\sin 36^\circ = -\frac{\sqrt{10-\sqrt{5}}}{4}$$

$$E = \cos[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

hoc est:

IX $\mathfrak{E} = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\mathfrak{E} = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$

hoc est:

X $\mathfrak{E} = -\sin 54^\circ = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$.

His autem valoribus subſtitutis pro p et q illi ipſi valores emergunt, quos supra § 6 his litteris tribuimus.

DÉMONSTRATIONS
DE
QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE
PAR
NICOLAS FUSS.

Présenté le 4. Juillet 1799.

Il y a déjà plusieurs années qu'un jeune François, employé alors au Corps *Impérial* des Cadets de Terre, me parla d'un Théorème de Géométrie qui, dans le tems qu'il étoit encore à Paris à l'Ecole Royale militaire, avoit eu quelque célébrité et qu'on avoit prétendu tenir de feu Mr. d'Alembert. Je lui en donnai une démonstration, dont j'ai retrouvé depuis peu le brouillon en fouillant mes papiers. En relisant cette démonstration j'ai vu que la belle propriété qui en fait le sujet, peut conduire à d'autres non moins remarquables. En rassemblant mes idées sur cette matiere il en est résulté le petit Mémoire que j'ai l'honneur de présenter ici à l'Académie pour la collection des Mémoires traduits en Russe, qu'elle se propose de publier, ou bien pour les Actes mêmes, si elle le juge digne de cet honneur. Il y fera sans doute plaisir à plus d'un amateur de la Géometrie, et peutêtre même à quelque Géomètre de profession.

Lemme I.

Tab II. Fig. I. *Les trois côtés d'un triangle ABC étant prolongés jusqu'en D, E, F, de maniere que AD . BE . CF = AF . BD . E, les trois points D, E, F seront dans une ligne droite.*

Démonstration.

Tirons les lignes FE et DF, et quelque soit angle qu'elles comprennent, si nous nommons l'angle AFD = α et l'angle AFE = β, nous savons que

$$\sin\alpha : \sin D = AD : AF$$
$$\sin D : \sin E = BE : BD$$
$$\sin E : \sin\beta = CF : CE$$

d'où l'on tire en composant

$$\sin\alpha : \sin\beta = AD . BE . CF : AF . BD . CE.$$

Mais il y a en vertu du Lemme

$$AD . BE . CF = AF . BD . CE$$

d'où il suit que $\sin\beta = \sin\alpha$, donc $\beta = 180° - \alpha$ et partant DFE une ligne droite.

Théorème I.

Tab II. Fig. 2. *Si des trois angles A, B, C d'un triangle pour centre on décrit, avec des rayons différens, trois cercles, en les enfermant, deux-à-deux, entre leurs tangentes, les points d'intersection E, D, F de ces trois paires de tangentes seront situés dans une même ligne droite.*

C'eſt le Théorème dont j'ai parlé dans l'introduction § 1.

Démon-

Démonstration.

Soyent a, b, c les rayons des trois cercles ayant leurs centres en A, B, C, et il eſt clair que

$$AD : BD = a : b$$
$$BE : CE = b : c$$
$$CF : AF = c : a$$

d'où l'on tire en composant

$$AD . BE . CF : BD . CE . AF = 1 : 1$$

c'eſt-à-dire que

$$AD . BE . CF = AF . BD . CE$$

et par conſéquent, en vertu du Lemme, les points D, E, F ſeront dans une même ligne droite.

Théorème 2.

En concevant trois ſphères, dont les centres ſont dans les trois angles A, B C d'un triangle, enfermées, deux à deux, entre la ſurface d'un cone qui les touche, les ſommets de ces trois cones ſeront ſitués dans une même ligne droite. Tab II. Fig. 3.

Démonstration.

Un plan paſſant par les trois centres A, B, C des ſphères données paſſera par les axes et partant auſſi par les ſommets E, D, F des cones circonſcrits. Un plan touchant les trois ſphères A, B, C, en a, b, c, touchera auſſi les ſurfaces des trois cones circonſcrits et paſſera, par conſéquent, par leurs ſommets E, D, F. Ainſi les ſommets E, D, F, ſe trouvant tant dans le plan paſſant par les centres des ſphères que dans le plan qui les touche, ſe trouveront néceſſai-

ceſſairement dans l'intersection de ces deux plans, par conſéquent dans une même ligne droite.

Scholie 1.

Il eſt évident que la même vérité peut aussi être démontrée au moyen du Lemme. Car ſi par les centres A et B, par A et C et par B et C on conçoit des plans perpendiculaires au plan ABC, et qu'on tire dans ces trois plans les tangentes abD, acF, cbE, et des centres sur ces tangentes les perpendiculaires Aa, Bb; Aa, Cc; Bb, Cc, on aura

$$AD : BD = Aa : Bb$$
$$BE : CE = Bb : Cc$$
$$CF : AF = Cc : Aa$$

d'où l'on tire en composant

$$AD.BE.CF : AF.BD.CE = 1 : 1$$

par conséquent

$$AD.BE.CF = AF.BD.CE$$

donc E, D, F dans une même ligne droite.

Scholie 2.

La même propriété suit aussi immediatement du Théorème 1. Car supposons que chaque paire de cercles se tourne, avec ses tangentes, autour de la ligne tirée par les centres, les cercles engendreront des sphères et les tangentes le cone qui les renferme. L'intersection qui en devient le sommet reste immuable à sa place. Donc les sommets des trois cones seront dans une même ligne droite.

Scho-

Scholie 3.

Réciproquement le premier Théorème auroit pu être déduit, sans le secours du Lemme, comme corollaire, du second Théorème, où il eſt évidemment contenu. Car la section des trois sphères, faites par le plan passant par leurs centres, donne les trois cercles du Théorème 1, et la section des trois cones circonscrits, faite par le même plan, donne les trois paires de tangentes du Théorème 1. Aussi eſt-il très probable que la propriété énoncée dans ce Théorème a été découverte par la voye de cette considération stéréométrique.

Théorème 3.

Quatre cercles A, B, C, D, dont les centres sont dans le même plan, et les rayons de grandeur différente, étant enfermés deux-à-deux entre leurs tangentes, il en résultera six points d'intersection, qui seront situés dans quatre lignes droites, savoir trois-à-trois dans la même. Tab. II. Fig. 4.

Démonstration.

Combinant les quatre cercles ABCD trois-à-trois, il en résulte quatre combinaisons ABC, ABD, ACD, BCD. La premiere ABC admet derechef trois combinaisons de de deux-à-deux, savoir AB, AC, BC. En enferment ces trois paires de cercles entre leurs tangentes, il en résulte trois intersections que nous marquerons chacune par les deux lettres grecques correspondantes aux deux lettres latines indiquant les cercles auxquels l'intersection appartient. Ces trois intersections seront $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, toutes les trois, en vertu du Théorème 1, dans la même ligne droite. La seconde

seconde combinaison à trois, ABD, fournit trois combinaisons à deux AB, AD, BD; les intersections des tangentes, renfermant ces trois paires de cercles, savoir $\alpha\beta$, α^{δ}, β^{δ} seront, en vertu du Théorème 1, dans une même ligne droite. La troisième combinaison ACD admet les combinaisons AC, AD, CD, qui donnent les intersections $\alpha\gamma$, α^{δ}, γ^{δ}, situées dans une même ligne droite. Enfin la combinaison BCD engendre les combinaisons BC, BD, CD, et les intersections $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, placées dans une même ligne droite.

Théorème 4.

Quatre sphères dont les centres sont dans un même plan et les rayons différens, étant enfermées, deux-à-deux entre la surface d'un même cone, il en résultera six dont les sommets seront situés dans quatre lignes droites, savoir trois-à-trois dans la même.

On voit bien que ce Théorème se démontre de la même maniere que le précédent.

Théorème 5.

Ayant n cercles, ou n sphères A, B, C, D, E, etc. qui ont leurs centres dans le même plan si on les enferme, deux-à-deux, les cercles entre deux tangentes, ou les sphères entre un cone, il en résultera $\frac{n(n-1)}{1.2}$ *intersections de tangentes, ou* $\frac{n(n-1)}{1.2}$ *sommets de cone, placés sur* $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ *lignes droites différentes savoir trois-à-trois sur la même ligne; et en désignant chaque intersection des tangentes, ou le sommet de chaque cone, par les deux lettres grecques correspondantes aux deux lettres latines qui indiquent la paire de cercles ou de sphères à laquelle il*

il appartient, les trois intersections ou sommets qui portent les trois mêmes lettres, chacune deux fois, seront sur la même ligne droite.

Démonstration.

On sait par la Théorie des combinaisons que lorsque n lettres A, B, C, D - - - - - N, sont combinées m à m, le nombre des combinaisons qui auront lieu sera

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots m}.$$

Le nombre des intersections de tangentes ou des sommets de cone est égal au nombre des combinaisons de n lettres prises deux-à-deux; ainsi à cause de $m = 2$, il sera $= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ Le nombre des lignes droites, où ces intersections ou sommets seront placés trois-à-trois, est égal au nombre des combinaisons de n lettres prises trois-à-trois; ainsi, à cause de $m = 3$, ce nombre sera $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$. Chaque assemblage ou grouppe de trois cercles, ou d'autant de spères, combinés deux-à-deux, donne trois lettres, chacune deux fois. Chaque grouppe, en vertu du Théorème 1 et 2, a ses intersections ou sommets sur la même ligne droite. Ainsi les intersections ou sommets qui renferment les mêmes trois lettres, chacune deux fois, seront dans la même ligne droite.

Scholie.

On sera frappé un moment de voir que dès que $n > 5$ le nombre des lignes surpasse celui des intersections ou sommets. Mais en regardant la 4e figure, où chaque intersection se trouve sur deux lignes à la fois, on comprendra aisément que plus que le nombre n eſt grand, plus il y

aura de lignes où la même intersection se trouvera placée à la fois, et plus le nombre des lignes doit surpasser celui des intersections. Car il eſt facile à voir que le nombre des lignes, où la même intersection de tangentes ou le même sommet de cone se trouve à la fois sera le quotient qui vient en divisant le nombre total des lignes où les sommets se trouvent placés trois-à-trois par le tiers du nombre des intersections ou sommets. Il sera donc $= n - 2$.

Lemme 2.

Tab. II. Fig. 5. *Les trois côtés d'un triangle sphérique ABC étant prolongés jusqu'en D, E, F, de maniere que sin AD. sin BE. sin CF = sin AF. sin BD. sin CE, les trois points D, F, E seront dans un arc de grand cercle.*

Démonstration.

Joignons les points D et F, de même que F et E, par les arcs de grand cercle DF et FE, et soit l'angle DFA $= \alpha$ et l'angle EFA $= \beta$; et l'on sçait par la Trigonométrie sphérique que

$$\sin \alpha : \sin D = \sin AD : \sin AF$$
$$\sin D : \sin E = \sin BE : \sin BD$$
$$\sin E : \sin \beta = \sin CF : \sin CE$$

d'où l'on tire en composant

$$\sin \alpha : \sin \beta = \sin AD . \sin BE . \sin CF : \sin AF . \sin BD . \sin CE.$$

Or il y a en vertu du Lemme

$$\sin AD . \sin BE . \sin CF = \sin AF . BD . \sin CE$$

donc $\sin \alpha = \sin \beta$, et partant $\beta = 180^\circ - \alpha$, d'où il suit que

que les arcs DF et FE ne sont qu'un même arc de grand cercle.

Lemme 3.

En enfermant deux petits cercles tracés sur la surface d'une sphère des points A et B pour centres, entre deux arcs de grand cercle qui les touchent en a et b, α et β et qui se coupent dans le point O du grand cercle passant par les deux centres A et B, on aura

sin Aa : sin Bb = sin AO : sin BO.

Tab. II. Fig. 6.

Démonstration.

Comme les triangles sphériques AO*a* et BO*b* sont rectangles, il eſt évident que

$$\sin Aa = \sin AOa \cdot \sin AO$$
$$\sin Bb = \sin BOb \cdot \sin BO$$

et que par conséquent

$$\sin Aa : \sin Bb = \sin AOa \cdot \sin AO : \sin BOb \cdot \sin BO.$$

Mais $\sin AOa = \sin BOb$, partant

$$\sin Aa : \sin Bb = \sin AO : \sin BO.$$

Théorème 6.

Si l'on enferme trois cercles décrits sur la surface d'une sphère, deux-à-deux, entre deux arcs de grand cercle qui les touchent, les intersections de ces trois paires de grands cercles ſeront ſitués dans un même arc de grand cercle.

Démonstration.

Soyent les trois angles A, B, C, du triangle sphérique ABC les centres des cercles, soyent *a*, *b*, *c* leurs rayons (arcs de

Tab. II. Fig. 5.

grand cercle) et les intersections des tangentes, savoir D pour les cercles A et B, F, pour A et C, E pour B et C, et nous aurons en vertu du Lemme précédent

$$\sin AD : \sin BD = \sin a : \sin b$$
$$\sin BE : \sin CE = \sin b : \sin c$$
$$\sin CF : \sin AF = \sin c : \sin a$$

d'où l'on tire en composant

$$\sin AD . \sin BE . \sin CF : \sin BD . \sin CE . \sin AF = 1 : 1$$

et de là il suit que

$$\sin AD . \sin BE : \sin CF = \sin BD . \sin CE . \sin AF$$

donc, en vertu du Lemme 2, les intersections D, F, E, seront dans un même arc de grand cercle.

Théorème 7.

Ayant n cercles A, B, C, D, etc. sur la surface de la même sphère, si on les enferme deux-à-deux entre deux tangentes, arcs de grand cercle, il en réſultera $\frac{n(n-1)}{1.2}$ *points d'interſection de tangentes, ſituées sur* $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ *arcs de grand cercle différens, ſavoir trois-à-trois sur chacun, et en désignant chaque interſection par les deux lettres grecques correſpondantes aux deux latines qui indiquent la paire de cercles à laquelle elle appartient, les trois interſections qui portent les trois mêmes lettres, chacune deux fois, ſeront placées sur le même arc de grand cercle.*

La démonſtration eſt la même que celle du Théorème 5.

Scho

Scholie.

La démonſtration de presque tous les Théorèmes que nous venons de donner eſt fondée sur les Lemmes 1 et 2. (Fig. 1 et 5). La relation qui fait le ſujet de ces deux Lemmes, et qui a servi de base à nos Théorèmes, n'eſt pas la seule remarquable qui a lieu entre les lignes et les arcs de ces deux figures; il y en a d'autres qui ne sont pas moins intéressantes et qui, quoique hors de connexion avec les Théorèmes que nous avions en vuë, méritent d'être rapportées et démontrées ici. Ce sera le ſujet des deux Théorèmes suivans et de leurs corollaires.

Théorème 8.

Si entre les jambes CA et CB d'un angle quelconque ACB on tire à volonté deux lignes droites AD et BE qui ſe coupent en O, il y aura toujours Tab. II. Fig. 7.

I. $AD \cdot BO \cdot CE = AC \cdot DO \cdot BE$
II. $BE \cdot AO \cdot CD = BC \cdot EO \cdot AD$
III. $BC \cdot DO \cdot AE = BD \cdot AO \cdot CE$
IV. $CD \cdot BO \cdot AE = BD \cdot EO \cdot AC$.

Démonstration.

1° Le $\triangle ACD$ donne $\sin C : \sin D = AD : AC$
— $\triangle BDO$ — $\sin D : \sin B = BO : DO$
— $\triangle CBE$ — $\sin B : \sin C = CE : BE$

d'où l'on tire $1 : 1 = AD \cdot BO \cdot CE : AC \cdot DO \cdot BE$

et

et partant

$$\text{I. } AD.BO.CE = AC.DO.BE$$

2°) Le $\triangle CBE$ donne $\sin C : \sin E = BE : BC$
— $\triangle AOE$ — $\sin E : \sin A = AO : EO$
— $\triangle ACD$ — $\sin A : \sin C = CD : AD$

de là on tire $1 : 1 = BE.AO.CD : BC.EO.AD$
ce qui donne

$$\text{II. } BE.AO.CD = BC.EO.AD$$

3°) Le $\triangle CBE$ donne $\sin E : \sin B = BC : CE$
— $\triangle BDO$ — $\sin B : \sin O = DO : BD$
— $\triangle AEO$ — $\sin O : \sin E = AE : AO$

d'où l'on a $1 : 1 = BC.DO.AE : BD.AO.CE$
ce qui nous fournit

$$\text{III. } BC.DO.AE = BD.AO.CE.$$

4°) Le $\triangle ACD$ donne $\sin A : \sin D = CD : AC$
— $\triangle BDO$ — $\sin D : \sin O = BO : BD$
— $\triangle AEO$ — $\sin O : \sin A = AE : EO$

Ainsi on a $1 : 1 = CD.BO.AE : BD.EO.AC$
et par conséquent:

$$\text{IV. } CD.BO.AE = BD.EO.AC.$$

Corollaire.

Combinons les quatre égalités du Théorème, que nous venons de démontrer, deux-à-deux de la maniere suivante:

Le

Le produit de I et II, divisé par AD.BE, donne

AO.BO.CD.CE = AC.BC.DO.EO

d'où l'on déduit cette proportion

AO.BO : DO.EO = AC.BC.CD.CE

Le produit de II et III, divisé par BC.AO, donne

BE.AE.CD.DO = BD.AD.EO.EC

d'où l'on tire la proportion

DC.DO : EC.EO = AD.BD : AE : BE

Le produit de III et I, divisé par CE.DO, donne

AD.AE.BC.BO = AC.AO.BD.BE

ce qui fournit la proportion

BC.BO : AC.AO = BD.BE : AD.AE.

Théorème 9.

Si entre deux arcs de grand cercle AC et BC d'un angle sphérique quelconque ACB, on décrit deux arcs de grand cercle AD et BE, qui se coupent en O, il y aura Tab. II. Fig. 8.

I. sin AD . sin BO . sin CE = sin AC . sin DO . sin BE

II. sin BE . sin AO . sin CD = sin BC . sin EO . sin AD

III. sin BC . sin DO . sin AE = sin BD . sin AO . sin CE

IV. sin CD . sin BO . sin AE = sin BD . sin EO . sin AC

La démonstration de ce Théorème est parfaitement conforme à celle du Théorème précédent. On voit qu'on n'a qu'à écrire au lieu des côtés des triangles rectilignes de la 7me figure les sinus des côtés des triangles sphériques de la 8me.

Corol-

Corollaire.

Les opérations du corollaire précédent donnent

$\sin AO . \sin BO : \sin DO . \sin EO = \sin AC . \sin BC : \sin CD . \sin CE$

$\sin DC . \sin DO : \sin EC . \sin EO = \sin AD . \sin BD : \sin AE . \sin BE$

$\sin BC . \sin BO : \sin AC . \sin AO = \sin BD . \sin BE : \sin AD . \sin AE.$

RE-

RECHERCHES
SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER DEGRÉ À QUATRE OU PLUSIEURS VARIABLES.

PAR
Mr. JEAN TREMBLEY.

Présenté à l'Académie le 18 Juillet 1799.

Ce mémoire est uniquement destiné à étendre aux équations à quatre ou plusieurs variables les considérations que j'ai données pour les équations à trois variables, dans les Nova Acta de l'Académie Impériale T. 9. Quoique cette application n'ait pas de difficulté, elle ne m'a pas paru tout-à-fait exemte d'utilité. D'ailleurs elle m'a fourni l'occasion de revenir sur la méthode du mémoire cité et de la rendre plus directe et plus générale. En conséquence, je reprendrai à la fin de ce mémoire les exemples traités dans le mémoire précédent, et je ferai voir comment ils cèdent tous à une méthode unique. Je ne prétens point approfondir ce sujet comme il mérite de l'être, il eſt juste d'abandonner ce projet aux Géomètres que la nature a doués des talens nécessaires pour son exécution. Je serai content si l'on juge que mon travail n'eſt pas absolument inutile aux progrès de la science.

§. 1. Soit $v' = F : (\Phi', \Phi'')$, Φ', Φ'' étant des fonctions quelconques de x, y, z, on aura en prenant $v' = F : \Phi'$, puis $v' = F : \Phi''$

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) F' : \Phi', \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) F' : \Phi', \left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) F' : \Phi'$$
$$\left(\frac{\partial v''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) F' : \Phi'', \left(\frac{\partial v''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) F' : \Phi'', \left(\frac{\partial v''}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) F' : \Phi''.$$

Donc l'équation différentielle du premier degré sera

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \alpha \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right) + \beta \left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right) = 0,$$

et l'on aura les équations de condition

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \alpha \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \beta \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \alpha \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \beta \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) = 0,$$

On tire de là en éliminant

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)},$$

$$\beta = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)}.$$

L'équation différentielle sera donc

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)$$
$$- \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right) = 0.$$

Soit maintenant $v' = \frac{v}{\Pi}$, on aura

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right) = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{v}{\Pi\Pi}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right) = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{v}{\Pi\Pi}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right).$$

Sub-

Subſtituant ces valeurs dans l'équation différentielle, on obtient

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{v}{\Pi}\times$$
$$\left[\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right)\right]=0.$$

Comparant maintenant cette équation avec l'équation générale

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+Sv=0,$$

on aura

$$\frac{Q}{P}=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)},$$

$$\frac{R}{P}=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)},$$

$$\frac{S}{P}=-\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}-\frac{Q}{P}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}-\frac{R}{P}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right)}{\Pi},$$

donc

$$P\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right)+S\Pi=0,$$

ce qui eſt la même équation que nous avons supposée en v. L'on voit donc qu'il en eſt ici comme des équations à trois variables. En cherchant deux intégrales particulieres de l'équation

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+Sv=0,$$

on trouve la valeur Π, ce qui donne $v=\Pi F:(\Phi',\Phi'')$.

§. 2. On peut traiter la chose beaucoup plus généralement, en prenant l'équation différentielle:

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + S = 0,$$

P, Q, R, S étant des fonctions quelconques de v, x, y, z. Soit l'intégrale de cette équation $\psi = F:(\Phi', \Phi'')$, ψ, Φ', Φ'', étant des fonctions de v, x, y, z, on aura en différentiant d'abord Φ', puis Φ'', et considérant que

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\partial z,$$

on aura, dis-je

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi',$$
$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi',$$
$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right) F' : \Phi'.$$

Multipliant la seconde équation par α, la troisième par β, et ajoutant ces trois équations, on aura en égalant à zéro le coëfficient de $F' : \Phi'$, et faisant la même opération pour Φ'', on aura, dis-je, les trois équations suivantes:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right) + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}\right) + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}\right) = 0.$$

On éliminera α et β au moyen de ces trois équations, et l'on aura l'équation

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + S = 0,$$

en faisant

$$P = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\right);$$

$Q =$

$$Q = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\right) + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right);$$

$$R = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right) + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right);$$

$$S = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right) + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right).$$

Ces valeurs fournissent les trois équations suivantes:

$$P\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) = 0,$$
$$P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right) = 0,$$
$$P\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right) = 0.$$

Si l'on trouve les intégrales particulieres d'une de ces trois équations, on aura l'intégrale complète de l'équation proposée; car l'intégrale de l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) = 0,$$

est $\Psi = F:(\mu, \nu, \varrho), \mu, \nu, \varrho$ étant des fonctions de v, x, y, z, et chacune de ces quantités étant une intégrale particuliere de l'équation proposée. Ainsi la solution complète d'une équation aux différences partielles à quatre variables dépend de la solution particuliere d'une équation aux différences partielles à cinq variables, dans laquelle la quantité inconnue manque et où il ne se trouve que ses différentielles

§. 3. Prenons maintenant l'équation.

$$P\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) = 0.$$

Soit

Soit $\psi =$ Const. une intégrale particuliere de cette équation, on aura

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

La comparaison de ces deux équations donne $\frac{Q}{P} = \frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{R}{P} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{S}{P} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, d'où l'on tire les trois équations $Q\partial x - P\partial y = 0$, $R\partial x - P\partial z = 0$, $S\partial x + P\partial v = 0$. Ces trois équations sont entièrement analogues aux deux équations que nous avons données dans le mémoire précédent d'après Mr. de la Grange. Mais chaque équation ne contenant que deux différentielles et quatre inconnues, il eſt queſtion de savoir comment l'on doit procéder, pour arriver à l'intégration.

§. 4. Si Φ' et Φ'' ne contiennent pas la quantité v, les équations $Q\partial x - P\partial y = 0$, $R\partial x - P\partial z = 0$, deviendront, en substituant les valeurs de P, Q, R et faisant $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial v}\right) = 0$, et divisant par $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)$,

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right)\partial x - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\partial y = 0,$$

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\partial x - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\partial z = 0.$$

Ces deux équations, comme l'on voit, ne contiennent plus la quantité v. Si on les compare avec les équations $Q\partial x - P\partial y = 0$, $R\partial x + P\partial z = 0$ du § 3 du mémoire cité, lesquelles sont

$$\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right)\partial x - \left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right)\partial y = 0,$$

$$\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right)\partial x - \left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right)\partial z = 0;$$

ces dernieres équations coïncident avec les premieres, si l'on fait $\Phi' = \psi$, $\Phi'' = \Phi$. Les équations $Q\partial x - P\partial y = 0$, $R\partial x - P\partial z = 0$, s'intégreront donc par les méthodes indiquées

quées §. 21 et suivans du mémoire cité, en supposant P, Q, R des fonctions de x, y, z. Ainsi la solution du cas où Φ' et Φ'' sont des fonctions de x, y, z, sans v, pour les équations à quatre variables, dépend de la solution du cas où Φ est une fonction de x, y, z pour les équations à trois variables, ce qui est connu des Géomètres.

§. 5. L'équation $S\partial x + P\partial v = o$, devient, en faisant pour abrêger :

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = a,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = b,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = c,$$
$$\left(-c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right)\partial x - c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\partial v = o.$$

Mais les équations $Q\partial x - P\partial y = o$, $R\partial x - P\partial z = o$, donnent $b\partial x + c\partial y = o$, $c\partial z - a\partial x = o$, donc la première équation devient

$$-c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\partial x - c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\partial y - c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\partial z - c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\partial v = o, \text{ ou}$$
$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\partial v = o,$$

dont l'intégrale est $\Psi = \text{Conft.}$

§. 6. Il se présente ici la même difficulté que nous avons examinée dans le mémoire cité §. 5. Il peut avoir disparu un facteur commun à toute l'équation, ensorte que l'équation $P\partial v + S\partial x = o$, se trouvant divisée par un facteur, ne contient pas tous ses termes, et par conséquent n'est pas susceptible des substitutions prescrites. On remédie à cet inconvénient en étendant au cas actuel les deux Théorèmes que j'ai démontrés pour les équations à trois

varia-

variables. Le premier eſt que le facteur qui divise toute l'équation eſt néceſſairement une fonction de x, y, z ſeulement, ſans v. Pour le prouver, reprenons l'équation différentielle, qui peut se mettre sous cette forme :

$$-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-a\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-a\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0.$$

Soit p le facteur commun à toute l'équation, s'il contenait la quantité v, on aurait en faisant $p=0$,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\partial v=0.$$

Or p, étant diviseur de l'équation, doit diviser la quantité

$$-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-a\left(\frac{\partial\psi}{dz}\right),$$

c'eſt-à-dire que lorsque $p=0$, et par conſéquent $\partial p=0$, on aura auſſi

$$-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-a\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0.$$

Or nous avons par le § précédent $b=-c\frac{\partial y}{\partial x}$, $a=c\frac{\partial z}{\partial x}$, ce qui donnne, en ſubſtituant ces valeurs :

$$-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0, \text{ ou}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z=0.$$

Tirant de l'équation $\partial p=0$, la valeur

$$\partial z=-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}\partial x-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}\partial y-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}\partial v,$$

et la ſubſtituant dans l'équation que nous venons de trouver, on aura

$$\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right)\partial y+\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right)\partial x-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\partial z=0,$$

équation qui doit avoir lieu quelles que soyent x, y z. donc $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)=0$, donc p eſt une fonction de x, y, z, ſeulement, ſans v.

§. 7.

§. 7. Le second Théorème eſt que ce facteur p, commun à toute l'équation, eſt nécessairement un facteur de Φ' ou Φ''. Pour le prouver, nous remarquerons que l'équation $Q\partial x - P\partial y = 0$, donne proprement

$$b\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial x + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\partial y = 0.$$

Je dis que p doit diviser $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$, sans qu'il faudrait qu'il fut à la fois diviseur de b et de c, c'eſt-à-dire que l'on aurait à la fois p diviseur de

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \text{ et de } \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right),$$

et lorsque $p = 0$, on aurait à la fois

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = 0,$$

Φ' et Φ'' reſtant indépendans l'un de l'autre. Donc p sera diviseur de $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$ et de $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)$, et par conséquent de $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$, puisqu'on peut supposer

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\partial z = 0;$$

ou diviseur de $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$ dans la premiere quantité et de $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)$ dans la seconde. En un mot, il faudra toujours qu'il soit diviseur de deux de ces trois quantités $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)$ ou $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)$, et par conséquent de la troisième en vertu des équations

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\partial z = 0;$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\partial z = 0,$$

et par conséquent diviseur de Φ' ou Φ''. Si donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = p\psi''$, on aura $\psi = p\psi' + q$, ψ' étant $= \int\psi''\partial v$, et q étant une

fonction de $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, sans v. Donc

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = p\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + \psi'\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = p\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) + \psi'\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = p\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) + \psi'\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right).$$

Subſtituant ces valeurs dans la quantité

$$-c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + a\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

elle deviendra

$$p\left(-c\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right) + \psi'\left(-c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right)$$
$$-c\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right).$$

Le premier membre eſt divisible de lui même par p; le second, affecté de ψ', doit être séparement diviſible par p, parce que le troisième ne contient point de v, et que ψ' eſt affecté de v; mais ψ', par supposition, n'eſt pas diviſible par p; donc

$$-c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

doit être diviſible par p, ou

$$-c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \mathrm{M}p,$$

M étant un facteur quelconque, ou

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \mathrm{M}p,$$

équation dont l'intégrale eſt $\mu p = \mathrm{F} : (\Phi', \Phi'')$, μ étant un facteur premier avec p, que nous allons déterminer. On aura en procédant comme ci-dessus

$$-c\left(\frac{\partial.\mu p}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial.\mu p}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial.\mu p}{\partial z}\right) = 0, \text{ ou}$$
$$\mu\left(-c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) + p\left(-c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) = 0,$$

donc $-c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = -\frac{p}{\mu}\left(-c\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) - a\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)$.

Ce

Ce dernier membre contient nécessairement p, puisque p n'eſt pas un facteur de μ; ainsi en faisant

$$-\tfrac{1}{\mu}\left(-c\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right)+b\left(\tfrac{\partial u}{\partial y}\right)-a\left(\tfrac{\partial u}{\partial z}\right)\right)=\mathrm{M}, \text{ on a}$$
$$-c\left(\tfrac{\partial p}{\partial x}\right)+b\left(\tfrac{\partial p}{\partial y}\right)-a\left(\tfrac{\partial p}{\partial z}\right)=\mathrm{M}p,$$

équation différentielle proposée. Donc p eſt un facteur de Φ' ou Φ''.

§. 8. Soit, par exemple l'équation

$$-2xyz\left(\tfrac{\partial v}{\partial x}\right)+(2xy+2y^2z)\left(\tfrac{\partial v}{\partial y}\right)-2xxy\left(\tfrac{\partial v}{\partial z}\right)-2vx-2yzv$$
$$+2xyv+2x^3+2x^2z+2xz^2=0.$$

On a ici $\mathrm{P}=-2xyz$, $\mathrm{Q}=2xy+2y^2z$, $\mathrm{R}=-2x^2y$, $\mathrm{S}=-2vx-2yzv+2xyv+2xyv+2x^3+2x^2z+2xz^2$. Les équations $\mathrm{Q}\partial x-\mathrm{P}\partial y=0$, $\mathrm{R}\partial x-\mathrm{P}\partial z=0$, donneront $(2x+2yz)\partial x+2xz\partial y=0$, $2xz\partial z-2xx\partial x=0$. La seconde donne, en divisant par x et intégrant, $\Phi'=xx-zz$, donc $z=\sqrt{xx-\Phi'}$. La premiere donne $2x\partial x+2z(y\partial x+x\partial y)=0$, ou $\frac{x\partial x}{\sqrt{xx-\Phi'}}+y\partial x+x\partial y=0$, donc $\Phi''=\sqrt{xx-\Phi'}+xy=xy+z$, donc $\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=2x$, $\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)=0$, $\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)=-2z$,

$$\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)=y,\ \left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=x,\ \left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)=1.$$

Maintenant l'équation $\mathrm{S}\partial x+\mathrm{P}\partial v=0$, devient

$$-(x+yz-xy)v\partial x+(x^3+x^2z+xz^2)\partial x-xyz\partial v=0.$$

Or dans la formule générale on a

$$\mathrm{P}=\left(\tfrac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\left(\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)-\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\right)=-xz\left(\tfrac{\partial\Psi}{\partial v}\right).$$

Or ici nous avons $\mathrm{P}=-2xyz$, donc s'il n'avait disparu aucun facteur, on aurait $\left(\tfrac{\partial\Psi}{\partial v}\right)=y$; mais cette supposition ne convenant pas, il faut multiplier y par un facteur de Φ' ou de Φ'', or $\Phi'=(x+z)(x-z)$. Je fais donc

 $\left(\tfrac{\partial\Psi}{\partial v}\right)=$

$(\frac{\partial\psi}{\partial v}) = yx + yz$, donc $\psi = (yx + yz)\,v + q$, q étant une fonction de x, y, z. Or nous devons avoir maintenant

$$(\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z = -(x + yz - xy)\,(x + z)\,\partial x$$
$$= (x^3 + x^2 z + xz^2)\,(x + z)\,\partial x.$$

Or $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = yv + (\frac{\partial q}{\partial x})$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = (x + z)v + (\frac{\partial q}{\partial y})$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = yv + (\frac{\partial q}{\partial z})$, donc $(y\,\partial x + (x+z)\,\partial y + y\partial z)\,v + (\frac{\partial q}{\partial x})\,\partial x + (\frac{\partial q}{\partial y})\,\partial y + (\frac{\partial q}{\partial z})\,\partial z =$

$$-(xx - xxy + xz + yzz)v\partial x + (v)\partial x + (x^4 + 2x^3 z + 2x^2 z^2 + xz^3)\partial x =$$

(à cause de $\partial y = -\frac{(x+yz)\,\partial x}{x\,z}$, $\partial z = \frac{x\,\partial x}{z}$),

$$-(xx - xz - yz^2 + x^2 y)\,v\,\partial x + (\tfrac{\partial q}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial q}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial q}{\partial z})\,\partial z.$$

Or on doit avoir $q = q'(x + z)$, donc

$$(\tfrac{\partial q}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial q}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial q}{\partial z})\,\partial z =$$

$(x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial x})\,\partial x + (x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial y})\,\partial y + (x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial z})\,\partial z + q'\partial x +)\,q'\,\partial z =$

$((x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial x}) + q')\,\partial x + ((x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial y})\,\partial y + ((x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial z}) + q')\,\partial z =$

$= (((x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial x}) + q')\,xz - (x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial y})\,(x+yz) + ((x+z)\,(\frac{\partial q'}{\partial z}) + q')\,xx)\partial x$

$= (x^2 z\,(\frac{\partial q'}{\partial x}) + xz^2\,(\frac{\partial q'}{\partial x}) + xzq' - xx\,(\frac{\partial q'}{\partial y}) - xyz\,(\frac{\partial q'}{\partial y}) - xz\,(\frac{\partial q'}{\partial y}) - yz^2\,(\frac{\partial q'}{\partial y})$

$+ x^3\,(\frac{\partial q'}{\partial z}) + x^2 z\,(\frac{\partial q'}{\partial z}) + x^2 q')\,\partial x$. Je fais $(\frac{\partial q'}{\partial z}) = x$, $(\frac{\partial q'}{\partial x}) = z$, $(\frac{\partial q'}{\partial y}) = 0$, ce qui donne $q' = xz$, et la formule égale à $2x^3 z + 2x^2 z^2 + x^4 + xz^3$, comme cela doit être, donc

$$\psi = (yx + yz)\,v + xz\,(x + z) = F : (xx - zz), (xy + z),$$

intégrale complete de l'équation proposée.

§. 9. Passons maintenant au cas où Φ', Φ'' renferment la quantité v. Nous suivrons pied-à-pied la méthode exposée dans les § 22 et suivans du mémoire cité, seulement nous completerons cette méthode pour le cas où il se trouve des exponentielles, cas que nous n'avons traité que fort imparfai-

parfaitement dans le mémoire précédent. Nous supposerons d'abord que les quantités Φ', Φ'', ψ ne renferment point d'exponentielles. Nous avons trouvé ci-dessus § 2, l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)=0.$$

Soit $\Phi'=u'u''$, μ', μ'' étant des fonctions quelconques de x, y, z, v, l'équation deviendra

$$\mu''\left(P\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)\right)+$$
$$\mu'\left(P\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\mu''}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\mu''}{\partial v}\right)\right)=$$
$$P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right),$$

donc

$$P\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)=$$
$$\frac{P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)-}{\mu''}$$
$$\frac{\mu'}{\mu''}\left(P\left(\frac{\partial u''}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial u''}{\partial z}\right)+S\left(\frac{\partial\mu''}{\partial v}\right)\right)=$$
$$-\frac{\mu'}{\mu''}\left(P\left(\frac{\partial u''}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial u''}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial u''}{\partial v}\right)\right).$$

On voit donc qu'en supposant $\mu'=0$, on a

$$P\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial u''}{\partial v}\right)=0.$$

On peut donc s'assûrer par là si une quantité quelconque eſt facteur de Φ' ou non. De plus, si l'on a une quantité de la forme $\pi\Phi'+\varrho$, π et ϱ étant des fonctions quelconques de x, y, z et v, on aura

$$P\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial y}+R\left(\frac{\partial(\pi\Phi+\varrho)}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial v}\right)=\right.$$
$$\pi\left(P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)\right)$$
$$+\Phi'\left(P\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\pi}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\pi}{\partial v}\right)\right),$$
$$+P\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)=\text{(en supposant }\Phi'=0)$$
$$P\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)+Q\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)-S\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right),$$

quanti-

quantité qui deviendra nulle si $\varrho = 0$. Multipliant donc chaque terme de la quantité $\pi\Phi' + \varrho$ par un coëfficient indéterminé, l'équation

$$P\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial(\pi\Phi'+\varrho)}{\partial v}\right) = 0,$$

combinée avec l'équation $\pi\Phi' + \varrho = 0$ donnera $\varrho = 0$, la quantité se reduira alors à $\pi\Phi'$ ou à $l\pi + l\Phi'$ (l designant le logarithme). Multipliant chacun de ces termes par un coëfficient indéterminé, on a $\alpha l\pi + \beta l\Phi'$, et l'on obtient l'équation

$$\frac{\alpha}{\pi}\left(P\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\pi}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\pi}{\partial v}\right)\right)$$
$$+ \frac{\beta}{\Phi'}\left(P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right)\right) = 0.$$

Or comme on a

$$P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial v}\right) = 0,$$

on a β indéterminé et $\alpha = 0$, ce qui donnera enfin la quantité Φ' que l'on cherche. Quelque soit le nombre des facteurs de $\pi\Phi'$, le procédé sera le même. On trouvera Φ'' par la même méthode.

§. 10. Il s'agit donc d'arriver à quelque quantité de la forme $\pi\Phi' + \varrho$, ou du moins à une quantité qui puisse prendre cette forme par le moyen des coëfficiens indéterminés que l'on met devant chaque terme, ou à la forme $\pi\mu' + \varrho$, μ' étant un facteur de Φ'. Or il résulte de ce que nous avons dit dans le § préc. que

$$P\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\mu'}{\partial v}\right) = 0,$$

lorsque $\mu' = 0$, donc

$$\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right) + \frac{Q}{P}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right) + \frac{R}{P}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}\right) - \frac{S}{P}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial v}\right) = M\mu',$$

M étant un facteur quelconque, donc

$$\frac{Q}{P} = \frac{M\mu' + \frac{S}{P}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right) - \frac{R}{P}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)}$$

Cette

Cette quantité eſt de la forme $\pi\mu' + \varrho$, en faiſant $\pi = \frac{M}{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)}$,

$$\varrho = \frac{\frac{S}{P}\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right) - \frac{R}{P}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)}.$$

La même chose peut se dire de $\frac{R}{P}$ et de $\frac{S}{P}$, et par conſéquent de $\frac{Q+R+S}{P}$; ou de $\frac{P+Q+R+S}{P}$, ou de $\frac{P+Q+R+S}{Q}$, ou de $\frac{P+Q+R+S}{R}$, ou de $\frac{P+Q+R+S}{S}$. Si quelque terme de μ' a diſparu, on remarquera que $\partial.\frac{Q}{P} = \mu\partial\mu' + \nu$, μ et ν étant des fonctions de x, y, z, v. Or

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) + \frac{Q}{P}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\frac{R}{P}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - \frac{S}{P}\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right) = M\mu',$$

donc $\partial\frac{Q}{P}$ eſt encore de la forme $\pi\mu' + \varrho$, et l'on peut en dire autant de toutes les autres fonctions que je viens de rapporter. La même chose a lieu pour $\partial\partial\frac{Q}{P}$ et pour toutes les différentielles des ordres ultérieurs. Chacune de ces différentielles reproduiſant de nouvelles fonctions, les termes de μ' qui ont diſparu dans quelques unes se reproduiront dans les autres, et l'on parviendra ainſi à une quantité de la forme $\pi\mu' + p$.

§. 11. Soit, par exemple l'équation

$$(2yv^3 - 2xzv^2 + xyv^2 - x^2zv - y^2zv + xyz^2)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$+ (y^2v^2 - 2yzv^2 + 2xv - 2xyzv + x^2 + y^2z^2 - y^2)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$+ (2z^2v^2 - 2v^2 + xz^2v - xv - yz^3 + yz)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+ yv^3 - xzv^2 - yv + xz = 0.$$

On a ici

$$Q = -2yzv^2 + y^2v^2 + 2xv - 2xyzv + x^2 + y^2z^2 - y^2.$$

Je fais

Je fais

$$\psi = Ayzv^2 + By^2v^2 + Cxv + Dxyzv + Ex^2 + Fy^2z^2 + Gy^2,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = Cv + Dyzv + 2Ex, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = Azv^2 + 2Byv^2 + Dxzv + 2Fyz^2 - 2Gy, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = Ayv^2 + Dxyv + 2Fy^2z,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 2Ayzv + 2By^2v + Cx + Dxyz.$$

L'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0,$$

donnera donc

$$v^4\left\{\begin{matrix}2Cy + 2Dy^2z\\ -2A - A\\ \quad -4B\end{matrix}\right\} + v^3\left\{\begin{matrix}2Axz + 4Bxy - 2Dxyz^2 + Dxy^2z\\ -2C - A \quad + A \quad -2B\\ \quad -2D\\ \quad +4E\end{matrix}\right\}$$

$$+v^2\left\{\begin{matrix}Ax^2z - Cy^2z - Dx^2yz^2 - Dy^3z^2 + 2Ex^2y + 2Gy^3\\ +2D - 4G \quad +2B \quad +2B\\ -4E - 4F \quad +2F \quad -D\\ \quad -2A\end{matrix}\right\}$$

$$+v\left\{\begin{matrix}Cxyz^2 + Dxy^2z^3 - 2Ex^3z - 2Exy^2z + 4Gxy\\ +4F - 2F \quad +D \quad -4G \quad +C\\ -2A \quad +D\\ \quad -2F\\ \quad -2B\end{matrix}\right\}$$

$$+2Ex^2yz^2 + 2Gy^3z^2 + 2Gx^2y - 2Gy^3 - Cx^2z = 0$$
$$+2F$$
$$-D.$$

Combinant cette équation avec celle qui résulte de $\Phi = 0$, savoir

$$v^2(Ayz + By^2) + v(Cx + Dxyz) + Ex^2 + Fy^2z^2 + Gy^2 = 0,$$

on éliminera v par les méthodes ordinaires, et l'on aura une équation en x, y, z dont on égalera chaque coëfficient à zéro,

à zero, ce qui donnera les valeurs des coëfficiens indéterminés A, B, C, D, E, F, G. Je ne donne pas ici le détail du calcul qui n'a d'autre difficulté que sa longueur. Je présenterai seulement le résultat, qui renferme trois suppositions différentes, 1°) $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 0$, $G = 0$; 2°) $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 0$; 3°) $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$, $F = 1$, $G = 0$. La premiere supposition donne $\Phi' = x^2 + xyzv$, $\Phi'' = y^2v^2 + xyzv$, $\psi = yzv^2 + xyzv + y^2z^2$, ou $\Phi' = x(x + yzv)$, $\Phi'' = yv(yv + xz)$, $\psi = yz(v^2 + xv + yz)$.

J'exclus de Φ' le facteur x, de Φ'' le facteur yv, de ψ le facteur yz, parceque ces facteurs ne satisfont pas aux équations de condition, et j'ai $\Phi' = x + yzv$, $\Phi'' = yv + xz$, $\psi = v^2 + xv + yz$. Ces valeurs satisfont aux équations de condition. Ainsi l'intégrale complète de l'équation proposée est $v^2 + xv + yz = F:((x + yzv), (yv + xz))$. Pour procéder généralement il auroit fallu faire $\psi = P + Q + R + S$, et le calcul auroit été précisement le même, à la longueur près. Comme je n'ai d'autre but ici que d'indiquer la marche de la méthode, je n'ai donné que la supposition que le calcul m'a fait voir être la plus simple, si cette supposition n'avait pas suffi, j'aurais passé aux différentielles, comme je l'ai dit plus haut.

§. 12. Si les valeurs de ψ, Φ', Φ'', contiennent des exponentielles, on cherchera d'abord, par la méthode que nous venons d'exposer, les facteurs algébriques. Soit, par exemple, $\psi = \psi'' e^{\psi'}$, on trouvera d'abord ψ''. Cela posé, on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) e^{\psi'} + \psi''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) e^{\psi'}$; $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) e^{\psi'} + \psi''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) e^{\psi'}$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) e^{\psi'} + \psi''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) e^{\psi'}$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial v}\right) e^{\psi'} + \psi''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial v}\right) e^{\psi'}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation $P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0$, on aura, en divisant par $e^{\psi'}$, $P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi''}{\partial v}\right) + \psi''\left(P\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi'}{\partial v}\right)\right) = 0$, ou faisant $\frac{P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi''}{\partial v}\right)}{\psi''} = M$, on remarquera qu'en vertu de ce qui précède $P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi''}{\partial v}\right)$ est divisible par ψ''.) $P\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - S\left(\frac{\partial\psi'}{\partial v}\right) + M = 0$.

§. 13. Dans le Mémoire cité j'étais parvenu à une équation de la même forme

$$P\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) + M = 0,$$

car cette équation se tire aisément du §. 27. Mais faute de connaître le procédé direct, j'avais eu recours à des tâtonnemens qui rendaient la méthode imparfaite. Je vais suppléer ici à ce défaut et indiquer un procédé direct pour intégrer l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) + M = 0$$

pour trois variables, et cette méthode s'étend d'elle même à un nombre quelconque de variables. Je fais $\psi' = \frac{a'}{A'}$, A', a' étant des fonctions quelconques de x, y, z. L'équation devient donc

$$P\left(\frac{\partial.\left(\frac{a'}{A'}\right)}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial.\frac{a'}{A'}}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial.\frac{a'}{A'}}{\partial z}\right) + M = 0,$$

ou en développant

$P\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x}\right)\right) + Q\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial y}\right)\right) - R\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial z}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial z}\right)\right) + MA'^2 = 0\ (a)$. Mettons maintenant dans cette équation au lieu de A', $\mu A' + \nu$, et au lieu de a', $\mu a' + \nu$, et l'équation deviendra,

$P((\mu$

$P((A'+\nu)(\mu(\frac{\partial a'}{\partial x})+a'(\frac{\partial \mu}{\partial x})+(\frac{\partial \nu}{\partial x}))-(\mu a'+\nu)(\mu(\frac{\partial A'}{\partial x})+A'(\frac{\partial \mu}{\partial x})+(\frac{\partial \nu}{\partial x}))$
$+Q((\mu A'+\nu)(\mu(\frac{\partial a'}{\partial y})+a'(\frac{\partial \mu}{\partial y})+(\frac{\partial \nu}{\partial y}))-(\mu a'+\nu)(\mu(\frac{\partial A'}{\partial y})+A'(\frac{\partial \mu}{\partial y})+(\frac{\partial \nu}{\partial y}))$
$-R((\mu A'+\nu)(\mu(\frac{\partial a'}{\partial z})+a'(\frac{\partial \mu}{\partial z})+(\frac{\partial \nu}{\partial z}))-(\mu a'+\nu)(\mu(\frac{\partial A'}{\partial z})+A'(\frac{\partial \mu}{\partial z})+(\frac{\partial \nu}{\partial z}))$
$+M(\mu A'+\nu)^2=0$, ou en développant et effaçant ce qui se détruit,

$\mu^2(P(A'(\frac{\partial a'}{\partial x})-a'(\frac{\partial A'}{\partial x}))+Q(A'(\frac{\partial a'}{\partial y})-a'(\frac{\partial A'}{\partial y}))-R(A'(\frac{\partial a'}{\partial z})-a'(\frac{\partial A'}{\partial z}))+MA'^2)$
$+\mu(P(A'(\frac{\partial \nu}{\partial x})-a'(\frac{\partial \nu}{\partial x}))+Q(A'(\frac{\partial \nu}{\partial y})-a'(\frac{\partial \nu}{\partial y}))-R(A'(\frac{\partial \nu}{\partial z})-a'(\frac{\partial \nu}{\partial z}))$
$+\mu\nu(P((\frac{\partial a'}{\partial x})-(\frac{\partial A'}{\partial x}))+Q((\frac{\partial a'}{\partial y})-(\frac{\partial A'}{\partial y}))-R((\frac{\partial a'}{\partial z})-(\frac{\partial A'}{\partial z}))$
$+\nu(P(a'(\frac{\partial \mu}{\partial x})-A'(\frac{\partial \mu}{\partial x}))+Q(a'(\frac{\partial \mu}{\partial y})-A'(\frac{\partial \mu}{\partial y}))-R(a'(\frac{\partial \mu}{\partial z})-A'(\frac{\partial \mu}{\partial z}))$
$+2M\mu A'\nu+M\nu^2=0$. Cette équation donne $\nu=0$, parceque le premier terme est nul, puisqu'il coïncide avec l'équation proposée, ce qui donne $\psi'=\frac{\mu a'}{\mu A'}=\frac{a'}{A'}$, comme cela doit être. Pourvu donc que l'on parvienne à une quantité de la forme $\mu A'+\nu$, on arrivera par la méthode des indéterminées à la forme veritable. Mais l'équation proposée (a) renfermant la quantité A, la quantité P, ou Q, ou R, ou M, ou $P+Q+R+M$ la renfermera, ou si elle ne la renferme pas, une de ses différentielles la renfermera, comme nous l'avons deja fait voir en détail plusieurs fois. J'éclaircirai tout cela plus bas par des exemples.

§. 14. Les opérations que je viens d'indiquer, pour le cas de trois variables, s'appliquent d'elles-mêmes au cas de quatre variables, ensorte qu'il me paraît superflu de les repeter; et l'on trouvera ainsi pour l'équation

$$P(\frac{\partial \psi'}{\partial x})+Q(\frac{\partial \psi'}{\partial y})+R(\frac{\partial \psi}{\partial z})+M=0,\quad \psi'=\frac{a'}{A'},$$

a' et A' etant des fonctions de x, y, z et v. Il s'agira donc uniquement de trouver la forme des quantités a' et A'. Or les quantités P, Q, R, S, M, ou généralement $P+Q+R+S+M$ contiendront les quantités a' et A',

ou si elles ne les contiennent pas, on passera à leurs différentielles, comme dans le cas précédent.

§. 15. Le théorème démontré §. 2. s'étend de lui même aux équations à cinq ou plus de variables. Je dis que si l'on a une équation à cinq variables:

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) + T = 0,$$

et que l'intégrale soit $\psi = F : (\Phi', \Phi'', \Phi''')$, ψ, Φ', Φ'', Φ''', étant des fonctions de x, y, z, v, u, on aura l'équation de condition $P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) - T\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0$, et l'on aura des équations semblables pour les quantités Φ', Φ'', Φ'''. Cela se peut démontrer de plusieurs manieres, comme le savent les Géomètres. En voici une démonstration fort simple, et qui s'étend à un nombre quelconque de variables. Si l'on fait successivement une de cinq variables x, y, z, v, u, nulle, ensorte qu'il n'en reste que quatre, on aura les cinq équations de condition suivantes:

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - T\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0,$$
$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - T\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0,$$
$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) - T\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0,$$
$$Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) - T\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0,$$
$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = 0.$$

Les quatre premiéres équations sont démontrées par le §. 2. puisqu'elles résultent du cas de quatre variables. La cinquème résulte de ce que si $T = 0$, l'intégrale particuliere $\psi =$ conft. donne

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = 0.$$

Or ces cinq équations ne contenant les différentielles que sous

sous une forme linéaire, on peut les ajouter ensemble, ce qui donnera, en divisant toute l'équation par 4,

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) - T\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = 0,$$

ce qui est l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

§. 17. Il est évident que ce procédé peut s'étendre à un nombre quelconque de variables, et que par conséquent si l'on a l'équation générale

$$P'\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial u}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial u}{\partial x'''}\right) + P^{IV}\left(\frac{\partial u}{\partial x^{IV}}\right) \ldots\ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial u}{\partial x^{(n)}}\right) + P^{(n+1)} = 0,$$

l'intégrale ayant la forme $\psi = F:(\Phi', \Phi'', \Phi''' \ldots\ldots \Phi^{(n-1)})$, on aura l'équation de condition :

$$P'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'''}\right) + P^{IV}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{IV}}\right) \ldots\ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = 0.$$

On trouvera une équation semblable pour chacune des quantités $\Phi', \Phi'', \Phi''' \ldots\ldots \psi^{(n-1)}$.

Cela posé, si les quantités $\Phi', \Phi'', \Phi''' \ldots \Phi^{(n-1)}$ ne contiennent pas de quantités exponentielles, on procédera précisément comme dans les §§. 9 et 10. Soit $\psi = \mu'\mu''$, μ', μ'' étant des fonctions de $x', x'', x''', \ldots x^{(n)}$, l'on aura

$$P'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right) + \left(P''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x'''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'''}\right) + P^{IV}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{IV}}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right.$$
$$+ \nu''\left(P'\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x''}\right) + P''\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x^{IV}}\right) + P^{IV}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x^{V}}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial u}\right)\right)$$
$$+ \mu'\left(P'\left(\frac{\partial\nu''}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\nu''}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\nu''}{\partial x'''}\right) + P^{IV}\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x^{IV}}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\mu''}{\partial u}\right)\right)$$
$$= 0.$$

Si

Si l'on fait $u' = o$, on a l'équation

$$P'\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial u'}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial u'}{\partial x'''}\right) + P^{IV}\left(\frac{\partial u'}{\partial x^{IV}}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial u'}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) = o.$$

On peut donc trouver par là si une quantité est facteur de ψ ou non. De plus, si l'on met au lieu de ψ la quantité $\pi\psi + \rho$, on aura

$$P'\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\pi\psi+\rho)}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\pi\psi+\rho)}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial u}\right) =$$

$$\pi\left(P'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right)$$

$$+ \psi\left(P'\left(\frac{\partial\pi}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\pi}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\pi}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\pi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\pi}{\partial u}\right)\right)$$

$$+ P'\left(\frac{\partial\rho}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\rho}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\rho}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right) = o.$$

Si l'on fait $\psi = o$, cette équation se reduira à

$$P'\left(\frac{\partial\rho}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\rho}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\rho}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right) = o,$$

quantité qui deviendra nulle si $\rho = o$. Multipliant donc chaque forme de la quantité $\pi\psi + \rho$ par un coëfficient indéterminé, et combinant l'équation :

$$P'\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial x^{n}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial(\pi\psi+\rho)}{\partial u}\right) = o,$$

la quantité se reduira alors à $\pi\psi$, et affectant chaque facteur d'un exposant indéterminé, on aura $\alpha l\pi + \beta l\psi$, ce qui donnera

$$\frac{\alpha}{\pi}\left(P'\left(\frac{\partial\pi}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\pi}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\pi}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\pi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\pi}{\partial u}\right)\right)$$

$$+ \frac{\beta}{\psi}\left(P'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right) = o.$$

Or $P'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = o.$

Donc $\alpha = o$, ce qui donnera la quantité ψ que l'on cherche, par

ou l'un de ses facteurs, et chaque facteur peut se trouver par un procédé semblable.

§. 18. Il s'agit donc d'arriver à quelque quantité de la forme $\pi\mu' + \varsigma$, μ' étant un facteur de ψ. Or l'on a

$$P'\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'''}\right) \ldots\ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial u}\right) = 0,$$

M étant un facteur quelconque, puisque le premier membre de cette équation est nul lorsque $\mu' = 0$. Donc

$$\frac{P''}{P'} = \frac{M\mu' - \left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'}\right) - \frac{P'''}{P'}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'''}\right) \ldots\ldots - \frac{P^{(n)}}{P'}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x^{(n)}}\right) + \frac{P^{(n+1)}}{P'}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x''}\right)}$$

quantité qui est de la forme $\pi\mu = \varrho$, en faisant $\pi = \frac{M}{\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x''}\right)}$,

$$\varrho = \frac{\frac{P^{(n+1)}}{P'}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'}\right) - \frac{P'''}{P'}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x'''}\right) \ldots\ldots - \frac{P^{(n)}}{P'}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x^{(n)}}\right)}{\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x''}\right)}.$$

La même chose peut se dire de tous les autres coëfficiens, et par conséquent de leur somme, si quelque terme de μ' a disparu, on remarquera que $\partial . \frac{P''}{P'} = \mu\partial\mu' + \nu$, μ et ν étant des fonctions de toutes les variables. Mais $\partial\mu' = \varrho\mu'$ par ce qui précède, donc $\partial . \frac{P''}{P'} = \mu\varrho\mu' + \nu$, et la même chose peut se dire des différentielles de tous les autres coëfficiens, et par conséquent de leur somme. Ces différentielles premières fourniront de nouveaux termes. Si ces termes ne suffisent pas, on passera aux différentielles secondes, troisièmes &c. lesquelles seront toujours de la même forme par la même raison. Chacune de ces différentielles reproduisant de nouvelles fonctions, les termes de μ' qui ont disparu dans quelques unes, se réproduiront dans les autres, et l'on parviendra ainsi à une quantité de la forme $\pi\mu' + \varsigma$.

§. 19.

§. 19. Si les quantités ψ, Φ', Φ'' . . . . $\Phi^{(n-1)}$ contiennent des exponentielles, on procédera comme dans le §. 12. Soit $\psi = \psi'' e^{\psi'}$, substituant les valeurs des différentielles de cette quantité dans l'équation de condition, on aura, en divisant par $\psi'' e^{\psi'}$ et faisant

$$M = \frac{P'\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x^{(n)}}\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x^{(n+1)}}\right)}{\psi''} - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x^{(n+1)}}\right),$$

$$P'\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right) + P''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x''}\right) + P'''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'''}\right) \ldots + P^{(n)}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x^{(n)}}\right) + M = 0.$$

Je fais $\psi' = \frac{a'}{A'}$, A′ et a' étant des fonctions de

$$x', \; x'', \; x''' \ldots . \; x^{(n+1)}.$$

L'équation devient donc

$$P'\left(\partial\frac{\frac{a'}{A'}}{\partial x'}\right) + P''\left(\partial\frac{\frac{a'}{A'}}{\partial x''}\right) + P'''\left(\partial\frac{\frac{a'}{A'}}{\partial x'''}\right) \ldots\ldots$$
$$+ P^{(n)}\left(\partial\frac{\frac{a'}{A'}}{\partial x^{(n)}}\right) + P^{(n+1)}\left(\partial\frac{\frac{a'}{A'}}{\partial x^{(n+1)}}\right) + M = 0,$$

ou en développant,

$$P'\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x'}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x'}\right)\right) + P''\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x''}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x''}\right)\right)$$
$$+ P'''\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x'''}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x'''}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x'''}\right)(a) \ldots\ldots\right.$$
$$+ P^{(n)} A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n)}}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n)}}\right)\Big) - P^{(n+1)}\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n+1)}}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n+1)}}\right)\right)$$
$$+ MA'^2 = 0.$$

Mettons maintenant dans cette équation $\mu A' + \nu$ au lieu de A′, $\mu a' + \nu$ au lieu de a', et l'équation deviendra

$$P'\left(\left(\mu A' + \nu\right)\mu\left(\frac{\partial a'}{\partial x'}\right) + a'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial\nu}{\partial x'}\right)\right)\Big)$$
$$- \left(\mu a' + \nu\right)\left(\mu\left(\frac{\partial A'}{\partial x'}\right) + A'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial\nu}{\partial x'}\right)\right)\Big)$$

$$+ P''$$

$$+ P''\left((\mu A' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial a'}{\partial x''}\right) + a'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x''}\right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x''}\right)\right)\right.$$
$$\left. - (\mu a' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial A'}{\partial x''}\right) + A'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x''}\right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x''}\right)\right)\right)$$
$$+ P'''\left((\mu A' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial a'}{\partial x'''}\right) + a'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x'''}\right) - \left(\frac{\partial \nu}{\partial x'''}\right)\right)\right.$$
$$\left. - (\mu a' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial A'}{\partial x'''}\right) + A'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x'''}\right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x'''}\right)\right)\right) \ldots\ldots$$
$$+ P^{(n)}\left((\mu A' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n)}}\right) + a'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x^{(n)}}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n)}}\right)\right)\right.$$
$$\left. - (\mu a' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n)}}\right) + A'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x^{(n)}}\right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n)}}\right)\right)\right)$$
$$- P^{(n+1)}\left((\mu A' + \nu)\mu\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n+1)}}\right) + a'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x^{(n+1)}}\right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n+1)}}\right)\right)$$
$$\left. - (\mu a' + \nu)\left(\mu\left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n+1)}}\right) + A'\left(\frac{\partial \mu}{\partial x^{(n+1)}}\right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n+1)}}\right)\right)\right)$$

$+ M(\mu A' + \nu)^2 = 0$, ou en développant et effaçant ce qui se détruit

$$\mu^2 \left(P'\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x'}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x'}\right)\right) + P''\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x''}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x''}\right)\right)\right.$$
$$+ P'''\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x'''}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x'''}\right)\right) \ldots\ldots\ldots$$
$$+ P^{(n)}\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n)}}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n)}}\right)\right)$$
$$\left. - P^{(n+1)}\left(A'\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n+1)}}\right) - a'\left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n+1)}}\right)\right) + MA'^2\right)$$
$$+ \mu\left(P'\left(A'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x'}\right) - a'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x'}\right)\right) + P''\left(A'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x''}\right) - a'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x''}\right)\right)\right.$$
$$+ P'''\left(A'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x'''}\right) - a'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x'''}\right)\right) \ldots\ldots$$
$$+ P^{(n)}\left(A'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n)}}\right) - a'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n)}}\right)\right) - P^{(n+1)}\left(A'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n+1)}}\right) - a'\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^{(n+1)}}\right)\right)$$
$$+ \mu\nu\left(P'\left(\left(\frac{\partial a'}{\partial x'}\right) - \left(\frac{\partial A'}{\partial x'}\right)\right) + P''\left(\left(\frac{\partial a'}{\partial x'}\right) - \left(\frac{\partial A'}{\partial x''}\right)\right)\right.$$
$$+ P'''\left(\left(\frac{\partial a'}{\partial x'''}\right) - \left(\frac{\partial A'}{\partial x'''}\right)\right) \ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + P^{(n)}\left(\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n)}}\right) - \left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n)}}\right)\right) - P^{(n+1)}\left(\frac{\partial a'}{\partial x^{(n+1)}}\right) - \left(\frac{\partial A'}{\partial x^{(n+1)}}\right) + 2MA'\right)$$

$$+ \nu\left(P'\left(a'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'}\right) - A'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'}\right)\right) + P''\left(a'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x''}\right) - A'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x''}\right)\right)$$
$$+ P'''\left(a'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'''}\right) - A'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'''}\right)\right) \ldots\ldots\ldots$$
$$+ P^{(n)}\left(a'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^{(n)}}\right) - A'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^{(n+1)}}\right) - P^{(n+1)}\left(a'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^{(n+1)}}\right) - A'\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^{(n+1)}}\right)\right)\right)$$
$$+ M\nu^2 = 0.$$

Cette équation donne $\nu = 0$, parceque le premier terme est nul, puisqu'il coïncide avec l'équation proposée, ce qui donne $\psi' = \frac{\mu a'}{\mu A'} = \frac{a'}{A'}$, comme cela doit être. Ainsi, pourvu que l'on parvienne à une quantité de la forme $\mu A' + \nu$, on arrivera par la méthode des indéterminées à la forme véritable. Mais l'équation proposée (a) renfermant la quantité A', la quantité P' ou P'', P''' &c. ou $P' + P'' + P'''$ &c. la renfermera, ou si elle ne la renferme pas, une de ses différentielles, ou la somme de ces quantités et de leurs différentielles la renfermera.

§. 20. Les principes que nous avons établi dans les §. précédens, rendent absolument générale la méthode que nous y avons exposée, et dispensent des divers artifices employés dans le Mémoire cité pour intégrer les équations à trois variables. (Ces artifices peuvent cependant être utiles pour abrêger les opérations.) Pour le prouver en détail, et donner en même tems des exemples qui éclaircissent suffisamment la méthode, nous reprendrons successivement les exemples traités dans le Mémoire cité, et nous les traiterons tous par cette méthode unique.

§. 21. Soit l'équation du §. 8. $x\sqrt{c}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\sqrt{c} + 2xy - 3x^2\sqrt{c} - y\sqrt{c} = 0$. On a ici $P = x\sqrt{c}$, $Q = -x$, $R = z\sqrt{c} + 2xy - 3x^2\sqrt{c} - y^2\sqrt{c}$. Donc les termes

mes compris dans la forme $P + Q + R$ sont $x + z + xy + x^2 + y^2$. Je prens la différentielle et j'ai en divisant par ∂x, $1 + \frac{\partial z}{\partial x} + y + x\frac{\partial y}{\partial x} + x + y\frac{\partial y}{\partial x}$, ou en substituant pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial x}$ leurs valeurs tirées des équations $Q\partial x - P\partial y = 0$, $R\partial x + P\partial z = 0$, trouvées dans le §. 2, on aura

$$1 + \frac{z}{x} + y + x + \frac{yy}{v}, \text{ ou } \frac{x + z + xy + xx + yy}{x}.$$

Je fais $\psi = Ax + Bz + Cxy + Dx^2 + Ey^2$, ce qui donne $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = A + Cy + 2Dx$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = Cx + 2Ey$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = B$. Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}) + Q(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}) - R(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}) = 0,$$

on aura l'équation

$$\begin{array}{llll} Ax\sqrt{c} & + Cxy\sqrt{c} & + 2Dx^2\sqrt{c} & - Bz\sqrt{c} + By^2 = 0, \\ & - 2E & - C & \\ & - 2B & + 3B\sqrt{c} & \end{array}$$

équation qu'il faut combiner avec l'équation

$$Ax + Bz + Cxy + Dx^2 + Ey^2 = 0.$$

Multipliant la seconde par $\sqrt{c}$ et l'ajoutant à la première, on fait disparaître les termes qui contiennent z; et l'on a

$$\begin{array}{llll} 2Ax\sqrt{c} & + 2Cxy\sqrt{c} & + 3Dx^2\sqrt{c} & + (B + E)y^2\sqrt{c} = 0. \\ & - 2E & - C & \\ & - 2B & + 3B\sqrt{c} & \end{array}$$

On tire de là $A = 0$, $E = -B$, $C = 0$, $D = -B$, ce qui donne en faisant $A = 1$, $\psi = z - x^2 - y^2$. Si $B = 0$, ce procédé ne peut servir, on a dans ce cas les équations

$$\begin{array}{llll} Ax\sqrt{c} & + Cxy\sqrt{c} & + 2Dx^2\sqrt{c} = 0, & Ax + Cxy + Dx^2 + Ey^2 = 0. \\ & - 2E & - C & \end{array}$$

Multipliant la seconde par $\sqrt{c}$ et la retranchant de la première, on a $-2Exy\sqrt{c} + (D\sqrt{c} - C)x^2\sqrt{c} - Ey^2\sqrt{c} = 0$, ce qui donne $E = 0$, $C = D\sqrt{c}$. On a donc en faisant

 $D = 1$,

$D = 1$, $\psi = xy\sqrt{c} + x^2 = (x + y\sqrt{c})$. Nous avons donc les trois facteurs x, $x + y\sqrt{c}$, $z^2 - x^2 - y^2$. Je fais

$$\psi = x^n (x + y\sqrt{c})^m (z - x^2 - y^2)^p,$$

ce qui donne $l\psi = nlx + ml(x + y\sqrt{c}) + pl(z - x^2 - y^2)$,

donc $\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial x})}{\psi} = \frac{n}{x} + \frac{m}{x + y\sqrt{c}} - \frac{2px}{z - x^2 - y^2}$;

$$\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial y})}{\psi} = \frac{m\sqrt{c}}{x + y\sqrt{c}} - \frac{2py}{z - x^2 - y^2}, \quad \frac{(\frac{\partial\psi}{\partial z})}{\psi} = \frac{p}{z - x^2 - y^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{P(\frac{\partial\psi}{\partial x})}{\psi} + \frac{Q(\frac{\partial\psi}{\partial y})}{\psi} - \frac{R(\frac{\partial\psi}{\partial z})}{\psi} = 0,$$

on a $$n'c + \frac{plx x\sqrt{c} - lpz\sqrt{c} + pyy\sqrt{c}}{z - x^2 - y^2} = 0,$$

ou $$\begin{matrix} nz\sqrt{c} - nx^2\sqrt{c} - ny^2\sqrt{c} \\ -p\sqrt{c} \quad + n\sqrt{c} \quad + p\sqrt{c} \end{matrix} = 0,$$

d'où l'on tire $n = p$, et m reste indéterminé.
On a donc $\psi = xz - xy^2 - x^3$, $\Phi' = x + y\sqrt{c}$, et l'intégrale complète est $xz - xy^2 - x^3 = F : (x + y\sqrt{c})$, comme on l'a trouvé dans le §. cité.

§. 22. Soit l'équation du §. 9.

$$(x - 2y)(\tfrac{\partial z}{\partial x}) + (2x - 3y)(\tfrac{\partial z}{\partial y}) - z = 0.$$

On a ici $P = x - 2y$, $Q = 2x - 3y$, $R = -z$. Donc les termes compris sous la forme $P + Q + R$ sont $x + y + z$. Je fais donc $\psi = Ax + By + Cz$, ce qui donne $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = A$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = B$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = C$. Substituant ces valeurs dans l'équation de condition $P(\frac{\partial\psi}{\partial x}) + Q(\frac{\partial\psi}{\partial y}) - R(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = 0$, on a $(A + 2B)x - (2A + 3B)y + Cz = 0$, équation qu'il faut combiner avec l'équation $Ax + By + Cz = 0$. Retranchant la seconde de la première, on a $2Bx - 2Ay = 0$, donc

$$-4By$$

$$(\tfrac{x}{y})$$

$\frac{x}{y} = \frac{A+2B}{B} = -\frac{B}{A}$ (en faisant $C = o$). Donc $AA + 2AB + BB = o$, $A + B = o$, $B = -A$, $\psi = x - y$. On a aussi $A = B = o$ et C indéterminé, ce qui donne $\psi = z$. Je fais donc $\psi = (x-y)^m z^n$, mais cette supposition ne satisfaisant pas, j'en conclus que ψ doit renfermer un facteur exponentiel. Je fais donc $\psi'' = (x-y)^m z^n$, ce qui donne

$$l\psi'' = ml(x-y) + nlz, \quad \left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) = \frac{m}{x-y},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)}{\psi''} = \frac{-m}{x-y}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}{\psi''} = \frac{n}{z},$$

donc $\frac{P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}{\psi''} = n - m.$

On a donc l'équation

$$(x-2y)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + (2x-3y)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) + n - m = o.$$

Je fais donc d'après la méthode exposée ci-dessus §. 12. $\psi' = \frac{ax+by+cz}{Ax+By+Cz}$, prenant les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)$ et les substituant dans l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(Ba - Ab)yy + (Ca - Ac)xx - zz + 2(Ab - Ba)yy + 2(Bc - Ca)yz + 2(Ab - aB)xx + (n-m)CCzz \\ -3(Ab - aB) + 2(Cb - Bc) + (n-m)BB \quad -3(Cb - Bc) + (n-m)AA \\ +2(n-m)AB + Ac - aC \quad + Bc - bC \\ \quad + 2(n-m)AC \quad + 2(n-m)BC\end{array}\right\} = o.$$

Le coëfficient de zz donne $C = a$, cela posé le coëfficient de yz donne $c = o$, ce qui fait évanouïr le coëfficient de xz, et les coëfficiens de xx, xy, yy donnent les trois équations suivantes: I. $2Ab - 2aB + (n-m)AA = o$;

II. $4aB - 4Ab + 2(n-m)AB = o$;

III. $2(Ab - Ba) + (n-m)BB = o$.

Retranchant la troisième équation de la première, on a $AA - BB = o$, ou $(A-B)(A+B) = o$, La supposition de $A = B$ ne donne rien; je fais donc $B = -A$, et les trois équations se réduisent à celle-ci: $2b + 2a + (n-m)A = o$,

donc

donc $A = \frac{2(a+b)}{m-n}$, et $\psi' = \frac{(m-n)(ax+by)}{2(a+b)(x-y)}$,

$$\psi = \psi'' e^{\psi'} = (x-y)^m z^n e^{\frac{(m-n)(ax+by)}{2(a+b)(x-y)}}.$$

Faisant $m = n = 1$, on a $\psi = (x-y)z$. Faisant $n = 0$, $b = 0$, $m = 2$, on aura $\Phi = (x-y)^2 e^{\frac{x}{x-y}}$.

Donc l'intégrale complète est

$$(x-y)z = F:(x-y)^2 e^{\frac{x}{x-y}}$$

comme on l'a trouvé dans le §. cité. Il est aisé de voir que l'on n'aurait pas une expression plus étendue en laisant les valeurs indéterminées.

En effet on a $(x-y)z = F:(x-y)^m z^n e^{\frac{(m-n)(ax+by)}{2(a+b)(x-y)}}$

$= F:(x-y)^{m-n}((x-y)z)^n e^{\frac{(m-n)((a+b)x-b(x-y))}{2(a+b)(x-y)}}$

$= F:(x-y)^{m-n} e^{\left(\frac{m-n}{2}\right)\frac{x}{x-y}} = F:(x-y)^{\frac{2(m-n)}{2}} e^{\frac{m-n}{2}\frac{x}{x-y}}$

$= F:(x-y)^2 e^{\frac{x}{x-y}}$, comme ci-dessus.

§. 23. Soit l'équation du §. 10.

$$(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - (x-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z = 0.$$

On a ici $P = x+y$, $Q = -(x-y)$, $R = -z$. Donc les termes compris sous la forme $P+Q+R$ sont $x+y+z$. Je fais donc $\psi = Ax + By + Cz$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = A,\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = B,\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = C.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0,$$

on a l'équation $(A+B)x + (A+B)y + Cz = 0$, équation qu'il faut combiner avec l'équation $Ax+By+Cz=0$. Retranchant la seconde de la première, on a $-Bx+Ay=0$, et faisant $C = 0$ dans la seconde on a $Ax + By = 0$, donc

donc $\frac{x}{y} = \frac{A}{B} = -\frac{B}{A}$, donc $AA + BB = 0$, donc $B = \pm A\sqrt{-1}$, $\psi = x + y\sqrt{-1}$, $\psi = x - y\sqrt{-1}$, et si l'on fait $A = B = 0$, C reste indéterminé, donc $\psi = z$. Je fais donc

$$\psi = (x + y\sqrt{-1})^m (x - y\sqrt{-1})^n z^p.$$

Donc $l\psi = ml(x + y\sqrt{-1}) + nl(x - y\sqrt{-1}) + pl\,z.$

Donc $\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\psi} = \frac{m}{x + y\sqrt{-1}} + \frac{n}{x - y\sqrt{-1}}$,

$$= \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\psi} = \frac{m\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}} + \frac{n\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\psi} = \frac{p}{z}.$$

On a en substituant ces valeurs dans l'équation de condition et reduisant, $m(1 - \sqrt{-1}) + n(1 + \sqrt{-1}) + p = 0$. Si $m = n$, on a $2m + p = 0$, $p = -2m$. Donc $\psi = (xx + yy)^m z^{-2m}$, et faisant $m = -\frac{1}{2}$, on a $\psi = \frac{z}{\sqrt{xx + yy}}$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

Soit maintenant $p = 0$, on a $m = -\frac{n(1 + \sqrt{-1})}{1 - \sqrt{-1}} = -n\sqrt{-1}$.

Donc $\psi = (x - y\sqrt{-1})^n (x + y\sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}}$.

Soit $n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}$, on a $-n\sqrt{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}$,

donc $\psi = (x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}} (x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}}$

$$= \sqrt{xx + yy}\left(\frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{xx + yy}.\, e^{-\text{arc T}\frac{x}{y}}.$$

Donc l'intégrale complète est

$$\frac{z}{\sqrt{xx + yy}} = F : \sqrt{x^2 + y^2}.\, e^{-\text{arc T}\frac{x}{y}}$$

comme l'on a trouvé dans le §. cité.

§. 24. Soit l'équation du §. 11.

$$4y^3(\alpha y + x^3)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - 4x^3(\alpha y + x^3)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (12x^2y^3 - 4\alpha x^3)z = 0.$$

On a ici

$$P = 4y^3(\alpha y + x^3),\ Q = -4x^3(\alpha y + x^3),\ R = -(12x^2y^3 - 4\alpha x^3)z.$$

Dans

Dans les termes compris sous la forme P + Q + R je trouve

$$x^3y^3 + y^4 + x^3y + x^6 + x^2y^3z + x^3z.$$

Je passe aux différentielles, et pour abréger je prens seulement la différentielle de R, qui donne

$$(x^3y^7 + x^4y^6 + x^5y^3 + x^8y^2 + x^2y^4 + x^6)\,z.$$

Je fais donc

$$\Psi = (Ay^7 + Bx^3y^5 + Cx^4y^3 + Dx^7y^2 + Exy^4 + Fx^5)\,z,$$

ce qui donne

$$(\tfrac{\partial\Psi}{\partial x}) = (3Bx^2y^6 + 4Cx^3y^3 + 7Dx^6y^2 + Ey^4 + 5Fx^4)\,z,$$

$$(\tfrac{\partial\Psi}{\partial y}) = (7Ay^6 + 6Bx^3y^5 + 3Cx^4y^2 + 2Dx^7y + 4Exy^3)\,z,$$

$$(\tfrac{\partial\Psi}{\partial z}) = Ay^7 + Bx^3y^6 + Cx^4y^3 + Dx^7y^2 + Exy^4 + Fx^5.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P(\tfrac{\partial\Psi}{\partial x}) + Q(\tfrac{\partial\Psi}{\partial y}) - R(\tfrac{\partial\Psi}{\partial z}) = 0,$$ on aura

$$\begin{array}{llllll}
12\alpha Bx^2y^{10} + 16\alpha Cx^3y^7 + 28\alpha Dx^6y^6 + 4\alpha Ey^8 + 20\alpha Fx^4y^4 \\
+12A & +4E & +16C & & -16E\alpha \\
 & -28A\alpha & -24B\alpha & & -4E\alpha \\
 & +12E & -28A & & \\
 & -4A\alpha & +12C & & \\
 & & -4B\alpha & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
+12Bx^3y^9 + 28Dx^9y^5 + 20Fx^7y^3 - 8Dx^{10}y^2 - 8Dx^{13}y - 4Fx^8 = 0. \\
+12B & -24B & -12C\alpha & -12C & & \\
 & +12D & -16E & -4D\alpha & & \\
 & & +12F & & & \\
 & & -4C\alpha & & &
\end{array}$$

équation qu'il faut combiner avec celle-ci :

$$Ay^7 + Bx^3y^6 + Cx^4y^3 + Dx^7y^3 + Exy^4 + Fx^5 = 0.$$

Je ne donne pas ici le détail de l'élimination qui n'a aucune difficulté. Je me contenterai de dire qu'on trouve

$$A = \alpha,$$

$A = \alpha$, $B = 1$, et tous les autres coëfficiens nuls, ou $A = 1$, $D - 1$, et tous les autres coëfficiens nuls. On a aussi évidemment $\psi = z$. Je fais donc

$$\psi = (\alpha y + x^3)^m (x^4 + y^4)^n y^p z^q,$$

donc $l\psi = ml(\alpha y + x^3) + nl(x^4 + y^4) + ply + qlz$,

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\psi} = \frac{3mx^2}{\alpha y + x^3} + \frac{4nx^3}{x^4 + y^4}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\psi} = \frac{\alpha m}{\alpha y + x^3} + \frac{4ny^3}{x^4 + y^4} + \frac{p}{y},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\psi} = \frac{q}{z}.$$ Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on obtient

$$12\alpha m x^2 y^4 + 12 m x^3 y^3 - 4\alpha^2 m x^3 y - 4\alpha m x^6 + \alpha y + x^3$$

$$+ 16\alpha n x^3 y^4 + 16 n x^6 y^3 \quad \frac{\alpha y + x^3}{y} \quad \frac{-4\alpha p x^3 y - 4 p x^6}{y} + 12 q x^2 y^3 - 4\alpha q x^3 = 0,$$

$$\frac{-16\alpha n \quad -16 n}{x^4 + y^4}$$

ou en reduisant au même dénominateur:

$$12\alpha m x^2 y^5 + 12 m x^5 y^4 - 4\alpha^2 m x^3 y^2 - 4\alpha m x^6 y - 4 p x^9 = 0.$$
$$+ 12\alpha q \quad + 12 q \quad - 4\alpha^2 p \quad - 8\alpha p$$
$$- 4\alpha^2 q \quad - 4\alpha q$$

On tire de là $p = 0$, $m = -q$, n reste indéterminé. Donc

$$\psi = (\alpha y + x^3)^{-q} (x^4 + y^4)^n z^q.$$

Faisant $q = 1$, $n = 0$, on a $\psi = \frac{z}{\alpha y + x^3}$.

Faisant $n = 1$, $q = 0$, on a $\Phi = x^4 + y^4$.

L'intégrale complète est donc $\frac{z}{\alpha y + x^3} = F : (x^4 + y^4)$.

§. 25. Soit l'équation du §. 12.

$$(4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$+ (3\alpha^3 xy + y^5 - \alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$- (6\alpha^3 xy^2 + 2y^6 - 2\alpha^3 x^2 y - 2\alpha^3 y^3 + 8x^3 y^3 - 14 x^2 y^4 + 8xy^5 + 2\alpha^3 x^3) z = 0$$

On a ici

$$P = 4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2,$$
$$Q = 3\alpha^3 xy + y^5 - \alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2,$$
$$R = -(6\alpha^3 xy^2 + 2y^6 - 2\alpha^3 x^2 y - 2\alpha^3 y^3 + 8x^3 y^3 - 14 x^2 y^4 + 8xy^5 + 2\alpha^3 x^3) z$$

On a d'abord $\psi = z$. Ensuite prenant les termes qu'offre Q, je fais $\psi = Axy + By^5 + Cx^2 + Dy^2$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = Ay + 2Cx$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = Ax + 5By^4 + 2Dy$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$. Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$ on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} +4Ax^2y^4 - 7Axy^5 + 4Ay^6 + Aa^3x^3y + 8Cxy^3 \\ +14C + 8C \quad -5Ba^3 + 3Ba^3 \quad -2Da^3 \\ +5Ba^3 + A \quad +2D \quad -2Da^3 \\ \qquad +15Ba^3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +2Ca^3x^3 - Aa^3xy^2 + 5By^5 \\ +6Da^3 \end{array}\right. = 0.$$

équation qu'il faut combiner avec l'équation

$$Axy + By^5 + Cx^2 + Dy^2 = 0.$$

On trouve après l'élimination $A = a^3$, $B = 1$, ce qui donne $\psi = a^3xy - y^5$. Je fais donc $\psi = (a^3x + y^4)^m y^n z^p$, mais cette supposition ne satisfaisant pas, j'en conclus qu'il y a des exponentielles; je fais donc

$$\psi = \psi'' e^{\psi'}, \quad \psi'' = (a^3x + y^4)^m y^n z^p,$$

$$l\psi'' = ml(a^3x + y^4) + nly + plz,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)}{\psi''} = \frac{ma^3}{a^3x + y^4}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)}{\psi''} = \frac{4my^3}{a^3x + y^4} + \frac{n}{y}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}{\psi''} = \frac{p}{z}$$

Donc $$\frac{P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)}{\psi''} + \frac{Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)}{\psi''} - \frac{R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}{\psi''}$$

$$= ma^3x + 4my^4 + 3na^3x + ny^4 - \frac{na^3x^2}{y} - na^3y$$

$$+ p(6a^3xy^2 + 2y^5 - 2a^3x^2y - 2a^3y^3 + 8x^3y^3$$

$$- 14x^2y^4 + 8xy^5 + 2a^3x^3,$$

Je fais $n = 0$, parceque je vois qu'en faisant $\psi'' = y$,

$$P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)$$

n'est pas divisible par ψ'', et j'ai l'équation

$$(4x^3y^3$$

$$(4x^2y^3 - \tfrac{7}{2}y^4 + 4y^5 + \alpha^3x^2)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + (3\alpha^3xy + y^5 - \alpha^3x^2 - \alpha^3y^3)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)$$
$$+ (6\alpha^3xy^2 + 3y^6 - 2\alpha^3x^2y - 2\alpha^3y^3 + 8x^3y^3 - 14x^2y^4 + 8xy^5 + 2\alpha^3x^3)z\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)$$
$$+ m\alpha^3x + 4my^4 + p(6\alpha^3xy^2 + 2y^6 - 2\alpha^3x^2y - 2\alpha^3y^3 + 8x^2y^3 - 14x^2y^4$$
$$+ 8xy^5 + 2\alpha^3x^3) = 0.$$

Je fais maintenant $\psi' = \frac{a'}{A'} =$ (en prenant pour la forme des termes de a' et A' la valeur de M qui renferme les valeurs de P, Q, R)

$$\frac{a'}{A'} = \frac{ax + by^4 + cxy^2 + dy^6 + ex^2y + fy^3 + gx^3y^3 + \frac{8}{3}bx^2y^4 + ixy^5 + kx^3}{A'x + By^4 + Cxy^2 + Dy^6 + Ex^2y + Fy^3 + Gx^3y^3 + Lx^2y^4 + Ixy^5 + Kx^3}.$$

On substituera cette valeur dans l'équation précédente, et l'on égalera à zéro le coefficient de chaque terme. Le calcul n'a d'autre difficulté que la longueur. Le moyen qui paraît le plus simple pour l'abréger est de ne calculer d'abord que les coefficiens de certains termes, comme les plus hautes puissances de x ou de y, ce qui servira à déterminer certains coefficiens et simplifiera l'expression de $\frac{a'}{A'}$. On recommencera ensuite le procédé jusqu'à ce que l'on atteigne sa véritable forme. Je vais exposer en détail ce moyen dans cet exemple. Je ne calcule d'abord que les termes qui contiennent y seul sans x, et j'ai, après les reductions, l'équation suivante:

I.	II.	III.	IV.
$\frac{4(Ba-Ab)}{-2a^3k^2p}y^9$	$+4(Bc-bC)y^{11}$	$+4(Bi-bI)y^{13}$	$+4(Dc-dC)y^{13}$
	$+4(Da-dA)$	$+2(Bd-Db)$	$+4(Fi-fl)$
	$+Fb-Bf)$	$+8mBD$	$+8mFD$
	$-2a^3(Bd-Db)$	$+2B^2p$	$-4a^3BDp$
	$-2a^3Bp$	$+4BFp$	
	$-4a^3BFp^2$		

V.	VI.	VII.
$+4(Di-dl)y^{15}$	$+4(Fa-fA)y^8$	$+4(cF-fC)y^{10}$
$+4mD^2$	$+3(Df-Fd)$	$-3a^3(Df-Fd)$
$+4BDp$	$+a^3(Bf-Fb)$	$+4mF^2$

VIII.	IX.	X.	
$+4mB^2y^{12}$	$+4FDpy^{15}$	$+2D^2py^{18}$	
$+8mBF$	$-2a^3D^2p$		$=0.$
$+2F^2p$			

Le dernier terme donne $p=0$, ce qui rend le neuvième nul; le huitième donne $B=0$; le premier donne $b=0$; le second donne $D=0$, $d=0$; le quatrième donne $I=0$, $i=0$; le sixième donne $A=0$, $a=0$; le septième (en faisant $f=0$) donne $c=-mF$, ce qui donne

$$\frac{a'}{A'}=\frac{-mFxy^2+ex^2y+gx^3y^3+bx^2y^4+kx^3}{Cxy^2+Ex^2y+Fy^3+Gx^3y^3+Hx^2y^4+Kx^3}.$$

On procédera de même, en calculant les plus hautes puissances de y, et l'on trouvera enfin $c=g=h=k=0$, $E=G=H=K=0$, $C=-F$, donc $\frac{a'}{A'}=\frac{xy^2}{xy^2-y^3}$, en faisant $F=-1$, $m=1$, donc $\frac{a'}{A'}=\frac{x}{x-y}$. Si au lieu de faire $p=0$, dans le dernier terme, on fait $D=0$, le huitième donnera $B=0$, $F=0$; le septième donnera $f=0$, $D=0$, $d=0$; le sixième donnera $b=0$, donc

$$\frac{a'}{A'}=$$

$$\frac{a'}{A'} = \frac{ax + cxy^2 + ex^2y + gx^3y^3 + hx^2y^4 + ixy^5 + kx^3}{Ax + Cxy^2 + Ex^2y + Gx^3y^3 + Hx^2y^4 + Ixy^5 + Kx^3},$$

et procédant de même, en calculant les plus hautes puissances de y, on obtient $A = 1$, $c = -1$, $K = -1$, $p = 1$, ce qui donne $\frac{a'}{A'} = \frac{-xy^2 - x^3}{x} = -x^2 - y^2$. On aura donc par le premier cas $\Phi = (\alpha^3 x + y^4)\, e^{\frac{x}{x-y}}$, $\psi = ze^{-x^2-y^2}$. L'intégrale complète est donc $ze^{-x^2-y^2} = F:(\alpha^3 x + y^4)\, e^{\frac{x}{x-y}}$

§. 26. Soit l'équation du §. 13.

$(yy + 2yz)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (xy + 2xz)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + xz + yz + zz = 0$

On a ici $P = yy + 2yz$, $Q = xy + 2xz$, $R = xz + yz + zz$.

Les termes qui offrent $P + Q + R$ sont $xy + yy + xz + yz + zz$.

Je fais donc $\psi = Axy + Byy + Cxz + Dyz + Ezz$,

ce qui donne $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = Ay + Cz$,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = Ax + 2By + Dz,$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = Cx + Dy + 2Ez.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0,$$

on aura l'équation

$$\left\{\begin{array}{llll} Ay^3 + Cy^2z + 2Cyz^2 + Ax^2y - 2Bxy^2 + 4Bxyz \\ \quad + 2A \quad - D \qquad\qquad\qquad - C \\ \quad - D \quad - 2E \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} + 2Axz + 2Dxz^2 + 2Ez^3 \\ + D \quad - 2E \\ \quad - C \end{array}\right\} = 0,$$

équation qu'il faut combiner avec celle-ci:

$$Axy + Byy + Cxz + Dyz + Ezz = 0.$$

En

En éliminant on trouve
$A = +B$, $C = D = E = 0$, ou $D = E = 1$, $A = B = C = 0$.
On a donc d'un côté $xy \pm yy$,
de l'autre $yz + zz$.
Je fais en conséquence

$$\psi = (x+y)^m (x-y)^n (y+z)^p z^q y^r,$$

ce qui donne

$$l\psi = ml(x+y) + nl(x-y) + pl(y+z) + qlz + rly.$$

Donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{m}{x+y} + \frac{n}{x-y}$,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{m}{x+y} - \frac{n}{x-y} + \frac{p}{y+z} + \frac{r}{y},$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{p}{y+z} + \frac{q}{z}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition et réduisant au même dénominateur, on a

$$\left.\begin{array}{llllll} px^3y^2 + px^3yz - px^2y^2z - pxy^2z^2 - qx^2y^3 - pxy^4 \\ -q \quad -q \quad -2q \quad -q \quad +m \quad +q \\ +r \quad +3r \quad +3m \quad +2m \quad -n \quad -r \\ \quad -3n \quad -2n \\ \quad -2r \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{llll} -pxy^3z + pxy^2z + py^3z^2 + qy^3 \\ +q \quad +2q \quad +q \quad -m \\ -3r \quad -3m \quad -2m \quad +n \\ \quad +3n \quad +2n \end{array}\right\}$$

On tire de là $r = 0$, $p = q$, $p = m - n$.
On a donc $\psi = (x+y)^m (x-y)^n (yz + zz)^{m-n}$.
Si l'on fait $m = n = 1$, on a $\psi = xx - yy$.
Si l'on fait $n = 0$, on a $\psi = (x+y)(yz + zz)$.

L'inté-

L'intégrale est donc $(x+y)(yz+zz) = F:(xx-yy)$, comme on l'a trouvé dans le §. cité.

§. 27. Soit l'équation du §. 14.

$$xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y(3x+2y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (6x+5y)z = 0.$$

On a ici $P = xy$, $Q = -3xy - 2yy$, $R = -6xz - 5yz$. Les termes que fournit $P + Q + R$ sont donc

$$xy + yy + xz + yz.$$

Je fais donc $\psi = Axy + Byy + Cxz + Dyz$,

ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = Ay + Cz$,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = Ax + 2By + Dz,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = Cx + Dy.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

on a $\left.\begin{matrix} Axy^2 + Cxyz - 3Axy - 4By^3 + 3Dy^2z + 6Cxz \\ -6B + 3D \\ -2A + 5C \end{matrix}\right\} = 0,$

équation qu'il faut combiner avec celle-ci:

$$Axy + Byy + Cxz + Dyz = 0,$$

On trouve en éliminant $A = B = C = D = 0$, ce qui donne

$$x + y, y = \psi.$$

Il est évident qu'on trouve aussi $\psi = x$, $\psi = z$. Je fais donc $\psi = x^m y^n z^p (x+y)^q$, donc $l\psi = mlx + nly + plz + ql(x+y)$, ce qui donne

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\psi} = \frac{m}{x} + \frac{q}{x+y}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\psi} = \frac{n}{y} + \frac{q}{x+y}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\psi} = \frac{p}{z}.$$

Substi-

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, et réduisant au même dénominateur, on a
$(m-5n+11p-2x)xy+(m-2n+5p-2q)yy+(6p-3n)xx=0$,
ce qui donne $n=2p$, $m=2q-p$. On a donc

$$\psi = x^{2q-p}y^{2p}z^{p}(x+y)^{q}.$$

Faisons $q=0$, nous aurons $\psi = \frac{z^p}{x^p}y^{2p}$, ou $\psi = \frac{zy^2}{x}$, en faisant $p=1$. Faisons $p=0$, nous aurons $\psi=(x+y)x^2$, (en faisant $q=1$). L'intégrale complète est donc

$$\frac{zy^2}{x} = F : x^2(x+y).$$

§. 28. Soit l'équation du §. 15.

$$(\alpha x+\beta y)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)+(\gamma x+\delta y)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)-z=0.$$

On a ici $P=\alpha x+\beta y$, $Q=\gamma x+\delta y$, $R=-z$. Les termes que donne la forme $P+Q+R$ sont $x+y+z$. Je fais donc $\psi = Ax+By+Cz$, ce qui donne

$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)=A,\quad \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)=B,\quad \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)=C.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)+Q\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)+R\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0,$$

on a l'équation $A\alpha x+A\beta y-Cz=0$,
$+B\gamma+B\delta$
qu'il faut combiner avec celle-ci: $Ax+By+Cz=0$. On trouve d'abord $\psi=z$, en faisant $A=1$, $B=1$, puisque les deux équations se reduisent à $Cz=0$. Faisant ensuite $C=0$, et éliminant $\frac{y}{x}$, on trouve

$$AB(\alpha-\delta)+BB\gamma-A^2\beta=0,$$

donc

donc $\frac{A}{B} = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\beta}$, ce qui donne, en faisant

$$p = \frac{\alpha - \delta - \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\beta},$$

$$q = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\beta},$$ les deux facteurs $\gamma + px$, $y + qx$. Je fais donc $\psi = (y + px)^m (y + qx)^n z^r$, donc $l\psi = ml(y + px) + nl(y + qx) + rlz$, ce qui donne

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\psi} = \frac{mp}{y + px} + \frac{nq}{y + qx},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\psi} = \frac{m}{y + px} + \frac{q}{x + qx}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\psi} = \frac{r}{z}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, et réduisant au même dénominateur, on a

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha mp + \beta mpq + \alpha nq + \beta npq + m\gamma + m\delta q + n\gamma + n\delta p + rp + rq)xy \\ + (\alpha mpq + \alpha npq + m\gamma q + n\gamma p + rpq)x \\ + (\beta mp + \beta nq + m\delta + n\delta + r)y^2 \end{array}\right\} = 0.$$

L'on a donc les trois équations :

I. $\beta mp + \beta nq + m\delta + n\delta + r = 0$,

II. $\alpha mpq + \alpha npq + m\gamma q + n\gamma p + rpq = 0$,

III. $\alpha mp + \beta mpq + \alpha nq + \beta npq + m\gamma + m\delta q + n\gamma + n\delta p + rp + rq = 0$.

Si l'on substitue la valeur de r, tirée de la première équation, dans les deux autres, celles-ci deviennent indentiquement nulles, comme on peut s'en assûrer en remettant les valeurs de p et q. Ainsi m et n restent indéterminées, et l'on a $r = -\beta mp - \beta nq - m\delta - n\delta$. On a donc

$$\psi = (y + px)^m (y + qx)^n z^{-\beta mp - \beta nq - m\delta - n\delta}.$$

Si l'on fait $n = 0$, on a $\psi = (y + px)^m z^{-(\beta p + \delta)m}$.

Faisons $m = -\frac{1}{\beta p + \delta}$, nous aurons

$\psi = z(y+px)^{\frac{-1}{\beta p+\delta}} = z(y+px)^{\frac{-2}{\alpha+\delta-\sqrt{\gamma(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}}$.

Faisons $r = 0$, ou $\frac{m}{n} = \frac{-\beta q-\delta}{\beta p+\delta}$.

Donc $\psi = (y+px)^{\frac{-n(\beta q+\delta)}{\beta p+\delta}}(y+qx)^n$

$= (y+px)^{n\left(\frac{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\delta}}\right)}$

$= (\text{en faisant } n = \alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma})$

$(y+px)^{(\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma})}(y+qx)^{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}$.

Donc l'intégrale complète sera

$$z(y+px)^{\frac{2}{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}}$$

$= F:(y+px)^{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}(y+qx)^{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}$,

ce qui revient à ce que nous avons trouvé dans le §. cité.

Faisons ensuite $m = n$, on aura

$\psi = (yy+(p+q)xy+pqxx)^m z^{-m(\beta(p+q)+2\delta)}$

$= (yy+(p+q)xy+pqxx)^m z^{m(\alpha+\delta)}$

$= (\text{en faisant } m = -\frac{1}{\alpha+\delta})$,

$$z(yy+(p+q)xy+pqxx)^{\frac{-1}{\alpha+\delta}}.$$

On peut donc mettre l'intégrale sous cette forme :

$$z(yy+(p+q)xy+pqxx)^{-\frac{1}{\alpha+\delta}}$$

$= F:((y+px)^{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}(y+qx)^{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}$,

comme nous l'avons aussi trouvé dans le §. cité.

§. 29. Soit l'équation du §. 16.

$$xx\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yy\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-n'xy = 0.$$

On a ici $P = xx$, $Q = yy$, $R = -n'xy$.

La forme que donne $P+Q+R$ est $xx+yy+xy$.

Je fais donc $\psi = Axx+Bxy+Cyy$,

ce

ce qui donne $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = 2Ax + By$; $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = Bx + 2Cy$; $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = 0$.
Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}) + Q(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}) - R(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}) = 0,$$

on aura $2Ax^3 + Bx^2y + Bxy^2 + 2Cy^3 = 0$,
équation qu'il faut combiner avec celle-ci :

$$Axx + Bxy + Cyy = 0.$$

On trouve en éliminant, $B = -A$, $C = 0$, ce qui donne $\psi = xx - xy = x(x-y)$, ou $C = -B = A = 0$, ce qui donne $\psi = (x-y)y$. Je fais donc $\psi = (x-y)^m x^n y^p$.
On a donc $l\psi = ml(x-y) + nlx + ply$.
Donc $\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial x})}{\psi} = \frac{m}{x-y} + \frac{n}{x}$; $\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial y})}{\psi} = -\frac{m}{x-y} + \frac{p}{y}$; $\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial z})}{\psi} = 0$.
Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on a

$$\frac{mxx}{x-y} + nx - \frac{myy}{x-y} + py = 0,$$

ou $(m+n)x + n)(m+p)y = 0$,
donc $n = -m$, $p = -m$, $\psi = (\frac{x-y}{xy})^m = \frac{y-y}{xy}$.
Comme je n'ai qu'une valeur de ψ, et que cette valeur ne contient point de z, j'en conclus qu'il doit y avoir un facteur exponentiel qui contiendra z. Je fais donc

$$\psi = \psi'' e^{\psi'},\ \psi'' = (x-y)^m x^n y^p,$$

et j'ai l'équation
$xx(\frac{\partial\psi'}{\partial x}) + yy(\frac{\partial\psi'}{\partial y}) + n'xy\frac{\partial\psi'}{\partial z} + (m+n)x + (m+p)y = 0$.
Comme la variable z n'entre pas dans cette équation, je fais

$$\psi' = (x-y)^\mu x^\nu y^\rho z + \alpha(x-y)^m x^n y^p.$$

Différentiant et substituant les valeurs,

on a $\left\{\begin{array}{l}\mu(x-y)^{\mu-1}x^{\nu}+2y^{\varrho}z+\nu(x-y)^{\mu}x^{\nu+1}y^{\varrho}z\\ +m\alpha(x-y)^{m-1}x^{n+2}y^{p}-\mu(x-y)^{\mu-1}x^{\nu}y^{\varrho+2}z\\ +\varrho(x-y)^{\mu}x^{\nu}y^{\varrho+1}z-m\alpha(x-y)^{m-1}x^{n+1}y^{p+2}\\ +n\alpha(x-y)^{m}x^{n+1}y^{p}+n'(x-y)^{\mu}x^{\nu+1}y^{\varrho+1}\\ +(m+n)x+(m+p)y+p\alpha(x-y)^{m}x^{n}y^{p+1}\end{array}\right\}=0$

J'ai d'abord $\alpha = 0$, ce qui reduit l'équation à

$$\left\{\begin{array}{l}\mu(x-y)^{\mu-1}x^{\nu+2}y^{\varrho}z+\nu(x-y)^{\mu}x^{\nu+1}y^{\varrho}z\\ +n'(x-y)^{\varrho}x^{\nu+1}y^{\delta+1}+(m+n)x\\ +(m+p)y-\mu(x-y)^{\mu-1}x^{\nu}y^{\delta+2}z\\ +\varrho(x-y)^{\mu}x^{\nu}y^{\delta+1}z\end{array}\right\}=0,$$

ou $\left\{\begin{array}{l}\mu(x-y)^{\mu}x^{\nu}y^{\varrho}z(x+y)+(x+y)^{\mu}x^{\nu}y^{\varrho}z(\nu x+\varrho y)\\ +n'(x-y)^{\mu}x^{\nu+1}y^{\varrho+1}+(m+n)x+(m+p)y\end{array}\right\}=0.$

Les termes qui contiennent z donnent $\left\{\begin{array}{l}\mu x+\mu y\\ +\nu+\varrho\end{array}\right\}=0,$

donc $\nu = \varrho = -\mu$ et l'équation devient

$$n'(x-y)^{\mu}x^{1-\mu}y^{1-\mu}+(m+n)x+(m+p)y=0,$$

ce qui donne $\mu = 1$, $n'+m+n=0$, $n=-m-n'$, $p=n'-m$.

Donc $\psi' = \frac{x-y}{xy}z$, $\psi'' = (x-y)^{m}x^{-m-n'}y^{n'-m}$

$= $ (en faisant $m=0$) $(\frac{y}{x})^{n'}$.

Donc $\psi = (\frac{y}{x})^{n'}e^{\frac{x+y}{xy}z}$. L'intégrale est donc

$$(\frac{y}{x})^{n'}e^{(\frac{x-y}{xy})z} = F:(\frac{x-y}{xy}),$$

comme on l'a trouvé dans le §. cité.

§. 30. Soit l'équation du §. 13.

$$xx(\tfrac{\partial z}{\partial x})-xy(\tfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})+yy=0.$$

On a ici $P = xx$, $Q = -xy$, $R = yy$.

La

La forme $P + Q + R$ donne $\psi = Axx + Bxy + Cyy$, ce qui donne $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = 2Ax + By$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = Bx + 2Cy$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = 0$. Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}) + Q(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}) - R(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}) = 0,$$

on a $\left\{\begin{matrix} 2Ax^3 + Bxy - 2Cxy^2 \\ -B \end{matrix}\right\} = 0$, ou $Ax^2 - Cy^2 = 0$,

équation qu'il faut combiner avec celle-ci :

$$Axx + Bxy + Cyy = 0.$$

On trouve, en faisant $B = C = 0$, $\psi = x$, $B = A = 0$, $\psi = y$. Je fais donc $\psi = x^m y^n$. Donc $l\psi = ml x + nly$,

$$\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial x})}{\psi} = \frac{m}{x}, \quad \frac{(\frac{\partial\psi}{\partial y})}{\psi} = \frac{n}{y}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on a $mx - nx = 0$, ou $m = n$. Donc $\psi = xy$. Pour trouver maintenant une autre valeur de ψ, qui contienne z, je fais $\psi = x^\mu y^\nu z + \alpha x^m y^n$, et substituant les valeurs dans l'équation, j'ai

$$\left\{\begin{matrix} \mu x^{\mu+1} y z + m\alpha x^{m+1} y^n - x^\mu y^{\nu+2} \\ -\nu \qquad\qquad -n\alpha \end{matrix}\right\} = 0.$$

Les termes qui contiennent z donnent $\mu = \nu$. Pour que les exposans des deux termes qui restent, s'accordent, je fais $m + 1 = \mu$, $n = \nu + 2 = \mu + 2$, donc $n = m + 3$. L'équation devient donc $-3\alpha - 1 = 0$, donc $\alpha = -\frac{1}{3}$, et faisant $\mu = 0$, $m = -1$, $n = 2$.

Donc $\psi = z - \frac{yy}{3x}$. L'intégrale est donc $z - \frac{yy}{3x} = F : xy$, comme nous l'avons trouvé dans le §. cité.

§. 31.

§. 31. Soit l'équation du §. 18.

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) - n'\sqrt{xx+yy} = 0.$$

On a ici $P = x$, $Q = y$, la forme $P+Q$ me donne donc $\psi = Ax + By$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = A$, $\left(\frac{\psi}{\partial y}\right) = B$. Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

on aura $Ax + By = 0$. Mais cette supposition étant trop particulière, je prens la forme $P + Q + R$ qui me donne $\psi = Ax + By + C\sqrt{xx+yy}$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = A + \frac{Cx}{\sqrt{xx+yy}}$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = B + \frac{Cy}{\sqrt{xx+yy}}$. Substituant ces valeurs, on a

$$Ax + By + C\sqrt{xx+yy} = 0,$$

ensorte que A, B, C restent indéterminées. Je fais donc

$$\psi = x^m y^n (xx+yy)^p,$$

ce qui donne $l\psi = mlx + nly + pl(xx+yy)$,

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\psi} = \frac{m}{x} + \frac{2px}{xx+yy}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\psi} = \frac{n}{y} + \frac{2py}{xx+yy}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on a $m + n + 2p = 0$. Ces valeurs fournissant point de z, je fais $\psi = x^\mu y^\nu (xx+yy)^\varrho z + \alpha x^m y^n (xx+yy)^p$. Différentiant et substituant les valeurs dans l'équation de condition, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mu x^\mu y^\nu (xx+yy)^\varrho z + 2\varrho x^{m+2} y^\nu (xx+yy)^{\varrho-1} z \\ + \nu x^\mu y^\nu (xx+yy)^\varrho z + 2\varrho x^\mu y^{\nu+2} (xx+yy)^{\varrho-1} z \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} + \alpha m x^m y^n (xx+yy)^p + 2p\alpha x^{m+2} y^n (xx+yy)^{p-1} \\ + \alpha n x^m y^n (xx+yy)^p + 2p\alpha x^m y^{n+2} (xx+yy)^{p-1} \end{array}\right\} \\ + n' x^\mu y^\nu (xx+yy)^{\varrho+\frac{1}{2}} \end{array}\right\} = 0.$$

Les

Les termes qui contiennent z donnent $\nu = -\mu$, $\varrho = 0$.
L'équation est donc
$\alpha x^m y^n (xx+yy)^p (m+n+2p) + n' x^\mu y^{-\nu} (xx+yy)^{\frac{1}{2}}$.
Les exposans donnent $p = \frac{1}{2}$, $m = \mu$, $n = -\mu$, ce qui réduit l'équation à $\alpha + n' = 0$, donc $\alpha = -n'$.
Donc $\psi = (\frac{x}{y})^\mu z - n'(\frac{x}{y})^\mu \sqrt{xx+yy}$.
La premiere valeur donne $n = -m-2p$,
Donc $\psi = (\frac{x}{y})^m (\frac{xx+yy}{y^2})^p$. Faisant $p = 0$, $\mu = 0$, $m = 1$,
On a pour l'intégrale $z - n' \sqrt{xx+yy} = F : \frac{x}{y}$, comme on l'a trouvé dans le §. cité.

§. 32. Soit l'équation du §. 19.
$(2y^2 + 2x^3y + 2xy^2z)(\frac{\partial z}{\partial x}) - (2xy + 2x^4 + 2x^2yz)(\frac{\partial z}{\partial y})$
$+ 4xy + 2x^2y + 2y^2z^2 - 2xz - 4x^3y - 4xy^2z = 0$.
La forme $P+Q+R$ donne $\psi = Ay^2 + Bxy + Cxz + Dx^3y$
$+ Exy^2z + Fx^4 + Gx^2yz + Hy^2z^2$.
Différentiant et substituant les valeurs dans l'équation
$P(\frac{\partial \psi}{\partial x}) + Q(\frac{\partial \psi}{\partial y}) - R(\frac{\partial \psi}{\partial z}) = 0$, on obtient l'équation :

$-4Axy^2$

$$\left\{\begin{array}{llll}
-4Axy^2 - 2Bx^2y - 2Dx^4y - 4Ex^3y^2z - 2Gx^3yz^2 & & & \\
\quad -4C \quad -4A \quad -4A \quad -2B & & & \\
\quad +4C \quad +2E \quad -2C & & & \\
\quad +4C \quad +2G & & & \\
\quad +2C & & & \\
+2By^3 + 2Cy^2z + 6Dx^2y^3 + 2Ey^4z + 8Fx^3y^3 & & & \\
\quad -4E \quad +2B & & & \\
\quad -4G & & & \\
+4Gxy^3z + 6Dx^5y^2 + 2Ex^3y^3z + 8Fx^6y + 4Gx^4y^2z & & & \\
+2B \quad +6D \quad +8F & & & \\
-8H \quad -2E \quad -2G & & & \\
\quad +8H & & & \\
2Cxy^2z^2 + 2Exy^4z^2 + 4Gx^2y^3z^2 - 2Bx^5 - 2Dx^7 & & & \\
+4H \quad -2E \quad -4H & & & \\
\quad +8H \quad -2G & & & \\
-4Fx^5yz - 2Gx^6z - 4Hx^4yz^2 - 4Ex^3y^2z^2 - 4Hx^2y^2z^3 & & & \\
-2D \quad -2G & & & \\
2Cx^2z + 4Ex^4y^3 + 4Gx^5y^2 + 4Ex^2y^4z + 4Gx^3y^3, & & &
\end{array}\right\} = 0.$$

équation qu'il faut combiner avec celle-ci :

$Ay^2 + Bxy + Cxz + Dx^2y + Exy^2z + Fx^4 + Gx^2yz + Hy^2z^2 = 0.$

On trouve en éliminant $C = D = E = F = G = H = 0$, $A^2 + B^2 = 1$, ce qui donne $A = \pm B\sqrt{-1}$; et d'une autre manière $A = B = C = D = E = H = 0$, $G = F$.

On a donc $\psi = y(x + y\sqrt{-1})$, $\psi = x^2(x^2 + yz)$.

Je fais donc en général

$\psi'' = (x + y\sqrt{-1})^m (x - y\sqrt{-1})^n x^p y^q (x^2 + yz)^r$, donc

$l\psi'' - ml(x + y\sqrt{-1}) + nl(x - y\sqrt{-1}) + plx + qly + rl(x^2 + yz).$

Donc

Donc $\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial x}\right) = \frac{m}{x+y\sqrt{-1}} + \frac{n}{x-y\sqrt{-1}} + \frac{p}{x} + \frac{2rx}{x^2+yz}$,

$\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right) = \frac{m\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}} - \frac{n\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} + \frac{q}{y} + \frac{rz}{x^2+yz}$,

$\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right) = \frac{ry}{x^2+yz}$,

Donc $P\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right) = -2mx^3\sqrt{-1} - 2mxyz\sqrt{-1}$
$-2my\sqrt{-1} + 2nx^3\sqrt{-1} + 2nxyz\sqrt{-1} + 2ny\sqrt{-1} - 2rx^2z$
$+4rxy^2 + 4rx^2y - 2r^2yz = M$, en faisant $p = 0$, $q = 0$, qui sont exclues par la condition que
$P\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right)$ soit divisible par Ψ''. On satisfait à l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right) = 0,$$

en faisant $m = n = r = 0$, ce qui donne une valeur de $\Psi = xx + yy$. L'autre valeur de ψ doit contenir une exponentielle; nous prenons donc l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right) + M = 0.$$

Je fais

$$\Psi = \frac{Ay^2 + Bxy + Cxz + Dx^3y + Exy^2z + Fx^4 + Gx^2yz + Hy^2z^2 + Ix^2z + Ky^2z + Lxy^2 + Mx^2y}{ay^2 + bxy + cxz + dx^3y + exy^2z + fx^4 + gx^2yz + hy^2z^2 + ix^2z + ky^2z + lxy^2 + mx^2y}.$$

On trouve, en substituant $D = -G$, $b = G$ et tous les autres coëfficiens nuls, ce qui donne

$$\psi = \frac{Gx^2yz - Gx^3y}{Gxy} = xz - xx.$$

L'intégrale est donc $(x^2 + yz)\,c^{xz-x^2} = F:(xx+yy)$, comme dans le §. cité.

§. 33. Soit l'équation $(y^2 - yz - 1)(2xy - x^3 - 3y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$
$-(y^2 - yz - 1)(4x^3 - 3x^2y + y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - x^3 + x^3z - 4x^3 + 4x^3z^2$
$+3x^2z - 4x^3yz + 3x^2y^2z - 3x^2yz^2 + 2xy^2 - 2xyz - 3y^3$
$+3y^2z$

$+ 3y^2z - 3y^3 + 2yz - y^3z + y^2z^2 = 0$, du §. 20. La forme de P donne $\psi = Ax^3 + Bxy + Cy^2$, ce qui donne en différentiant et substituant les valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

puis divisant par $y^2 - yz - 1$,

$$\left\{\begin{array}{llll} -3Ax^3 + 6Ax^2y - 9Ax^2y^2 + Bxy^2 - 3By^3 - 4Bx^4 \\ +2B \qquad\qquad +6C \qquad\qquad -2C \\ \qquad -8B \end{array}\right\} = 0,$$

équation qu'il faut combiner avec celle-ci: $Ax^3 + Bxy + Cy^2 = 0$. En faisant $A = 0$, on trouve $C = -B$, $\psi = (x - y)\,y$. En faisant $B = 0$, on trouve $A = 1$, $C = 1$, $\psi = x^3 + y^2$. Je prens ensuite le facteur $y^2 - yz - 1$ commun à P et à Q, et je fais $\psi = By^2 + Cyz$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 2By + Cz$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = Cy$. Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on a

$$\left\{\begin{array}{llll} 8Bx^3y - 6Bx^2y^2 + 2By^3 - 8Bx^3y^3 + 8Bx^3y^2z \\ +4C \qquad\qquad +3C \\ \qquad +6Bx^2y^4 - 2By^5 - 6Bx^2y^3z + 2By^4z \\ \qquad\qquad\qquad -3C \\ \qquad +4Cx^3z - 6Cx^2yz - Cy^2z + Cx^3y^2 \\ \qquad -Cx^3yz + 3Cx^2y^3z - 2Cxy^3 + 2Cxy^2z \\ \qquad +3Cy^4 - 3Cy^3z \end{array}\right\} = 0,$$

équation qu'il faut combiner avec celle-ci: $By^2 + Cyz = 0$. On trouve, en éliminant, $C = -B$.

Donc $\psi = y\,(y - z)$.

Je fais donc $\psi'' = (x - y)^m\,(x^3 + y^2)^n\,(x - z)^p$, ce qui donne $l\psi'' = ml\,(x - y) - nl\,(x^3 + y^2) + pl\,(y - z)$.

Donc $\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) = \frac{m}{x - y} + \frac{3x^2}{x^3 + y^2}$;

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)}{\psi''} = -\frac{m}{x - y} + \frac{2ny}{x^3 + y^2} + \frac{p}{y - z}, \quad \frac{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}{\psi''} = \frac{-p}{y - z}.$$

Sub-

Substituant ces valeurs, on a

$$\underset{\Psi''}{P\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial x}\right)} + \underset{\Psi''}{Q\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right)} - \underset{\Psi''}{R\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right)} = -3mx^2 - 2my + 3nx^2 + 2ny - py^3 - py^2z + 3px^2y^2 - 3py^2 - 4px^3y + 3px^2yz - 2pxy - 3px^2 - 4px^3z - px^3 = M.$$

En faisant $p = o$, $m = n$, on trouve $P\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right) = o$, ce qui donne une valeur de $\Psi = (x - y)(x^3 + y^2)$. Pour trouver une autre valeur de Ψ, j'introduis les exponentielles, ce qui donne l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right) + M = o.$$

Je prens pour la valeur de Ψ' la forme de M, ce qui donne

$$\Psi' = \frac{A x^3 + B y^2 z + C x^2 y^2 + D y^2 + E y + F x^3 y + G x^2 y z + H x y + I x^2 + K x^3 z + L x^3}{a x^3 + b y^2 z + c x^2 y^2 + d y^2 + e y + f x^3 y + g x^2 y z + h x y + i x^2 + k x^3 z + l x^3}.$$

Faisant $G = L$, $i = L$ et tous les autres coëfficiens $= o$, on a $\Psi = \frac{x^3 + x^2 y z}{x^2} = x + yz$. La substitution n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul. Je fais donc

$$\Psi = (x - y)^m (x^3 + y^2)^n (y - z)^p e^{l(x + yz)},$$

ce qui donne

$$l\Psi = ml(x - y) + nl(x^3 + y^2) + pl(y - z) + q(x + yz);$$

$$\underset{\Psi}{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)} = \frac{m}{x - y} + \frac{3nx^2}{x^3 + y^2} + q,$$

$$\underset{\Psi}{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)} = -\frac{m}{x - y} + \frac{2ny}{x^3 + y^2} + \frac{p}{y - z} + qz,$$

$$\underset{\Psi}{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)} = \frac{-p}{y - z} + qy.$$

On a en substituant les valeurs dans l'équation

$$\underset{\Psi}{P\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)} + \underset{\Psi}{Q\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)} - \underset{\Psi}{R\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)} = o,$$

reduisant au même dénominateur, et effaçant ce qui se détruit :

$$\left\{\begin{array}{l} -2qxy + qx^3 + 3qy^2 + 4qx^2z + 3px^2yz - qy^2z \\ +2p \quad -p \quad -3p \quad -4p \quad -3(n-m) - p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2(n-m) \end{array}\right\}$$
$$\left\{\begin{array}{l} +4qx^3y + 3qy^3 \quad +3px^2y^2 - 3px^2 \quad -2py \\ -4p \quad -p \quad +3(n-m) + 3n - 2m + 2n - 2m \\ \qquad +2(n-m) \end{array}\right\} = 0.$$

On tire de là $q = p = n - m$.
Donc $\psi = (x-y)^m (x^3+y^2)^n (y-z)^{n-m} e^{(n-m)(x+yz)}$.
Faisant $n = m = 1$, on a la valeur trouvée ci-dessus $\psi = (x-y)(x^3+y^2)$. Faisant $n = 0$, $m = -1$, on a $\psi = \left(\frac{y-z}{x+y}\right) e^{x+yz}$. L'intégrale sera donc $\left(\frac{y-z}{x-y}\right) e^{x+yz} = F:(x-y)(x^3+y^2)$.

§. 34. Soit l'équation du §. 30. $(y + 2xz^2 + xy^2 + 3yz^3 + y^3z + y^2 + 3xyz^2 + xy^3 + 3y^2z^3 + y^4z + xyz + 3x^2z^3 + 3xyz^4 + 3y^3z^2 - xz - x^4 - 2x^2yz - x^3yz - 2xyz^2 - yz - x^3y - 2xy^2z - 2y^3z^2 - x^4z - 2x^2yz^2 - x^3yz^2 - 2xy^2z^3)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (x + 2x^3y + 2x^2y^2z + y + 2x^2y^2 + 2xy^3z + xz + 2x^3yz + 2x^2y^2z^2 - yz - 3xz^3 + xy^2z - 3yz^4 - y^3z^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 1 + 2xy + 2xy^2z + y + 2x^2y^2 + 2xy^3z + xz + 2x^3yz + 2x^2y^2z^2 - z^2 - x^3z - 2xyz^2 + x^2yz^2 - 2y^2z^3 = 0$. On trouve par la méthode exposée dans les cas précédens $\psi = x + yz$, $\psi = y + xz$. Je fais donc $\psi'' = (x+yz)^m (y+xz)^n$, donc $l\psi'' = ml(x+yz) + nl(y+xz)$,

$$\left(\frac{\partial \psi''}{\partial x}\right) = \frac{m}{x+yz} + \frac{nz}{y+xz}, \quad \left(\frac{\partial \psi''}{\partial y}\right) = \frac{mz}{x+yz} + \frac{n}{y+xz},$$
$$\left(\frac{\partial \psi''}{\partial z}\right) = \frac{my}{x+yz} + \frac{nx}{y+xz}.$$

Donc

Donc $\frac{P(\frac{\partial\psi''}{\partial x}) + Q(\frac{\partial\psi''}{\partial z}) - R(\frac{\partial\psi'}{\partial z})}{\psi'} = m(-x^3 - x^2z + 3x^2yz - x^2y + 2x^2yz^2 - 2x^2y^2z + 3z^2 + y^2 + 3yz^2 + y^3 + 3xz^3 - 2xyz - 2xyz^2 + 3xy^2z - 2xy^2 - 2xy^3 - 2y^2z - 3z^4 + y^2z^2) + n(y^3z^2 + 3xy^2z - 2y^2z^3 - 2x^2y^2z + yz + 3yz^4 - 2xyz^2 + 2x^2y - x^2yz^2 - 2x^3y + 3xz^3 - z^2 - x_3z - x + 1) = M$. L'équation est donc

$$P(\tfrac{\partial\psi'}{\partial x}) + Q(\tfrac{\partial\psi'}{\partial y}) - R(\tfrac{\partial\psi'}{\partial z}) + M = 0.$$

Cette valeur de M me donne la forme de ψ', et je fais à l'ordinaire $\psi' = \frac{\Phi'}{\pi'}$, ayant $\Phi' = Ax^3 + Bx^3z + Cx^2yz + Dx^2y + Ex^2yz^2 + Fx^2y^2z + Gx^2yz + Hz^2 + Iy^2 + Kyz^2 + Ly^3 + Mxz^3 + Nxyz + Sxyz^2 + Txy^2z + Uxy^2 + A'xy^3 + B'y^2z + C'z^4 + D'y^2z^2 + E'y^3z^2 + F'y^2z^3 + G'yz + H'yz^4 + K'x^2y + K'x^3y + L'z^2 + M'x + N'$; $\pi' = ax^3 + bx^3z + cx^2yz + dx^2y + ex^2yz^2 + fx^2y^2z + gx^2yz + hz^2 + iyx^2 + kyz^2 + ly^3 + mxz^3 + nxyz + sxyz^2 + txy^2z + uxy^2 + a'xy^3 + b'y^2z + c'z^4 + d'y^2z^2 + e'y^3z^3 + f'y^2z^3 + g'yz + h'yz^4 + i'x^2y + k'x^3y + l'z^2 + m'x + n'$.

On trouve en éliminant $E' = F' = d' = n$, $m = 0$, et tous les autres coëfficiens nuls, ce qui donne $\psi' = \frac{ny^3z^2 + ny^2z^3}{ny^2z^2} = y + z$. Donc $\psi = (y + xz)^n e^{y+z}$, ou $\psi = (y + xz)\, e^{y+z}$, en faisant $n = 1$. On trouve aussi $F = E' = H' = g' = m$, $n = 0$, ce qui donne, en faisant nuls tous les autres coëfficiens:

$$\psi' = \frac{mx^2y^2z + my^3z^2 + myz^4}{myz} = x^2y + y^2z + z^3.$$

On a donc $\psi = (x + yz)^m e^{x^2y + y^2z + z^3} = $ (en faisant $m = 1$) $(x + yz)\, e^{x^2y + y^2z + z^3}$. L'intégrale complète est donc $(x + yz)\, e^{x^2y + y^2z + z^3} = F : (y + xz)\, e^{y+z}$, comme on l'a trouvé dans le §. cité.

§. 35. Soit l'équation du §. 34.
$(2xyz+2xz^3+2x^3z+2xyz^3-xz^2-2x^2yz-x^4-x^2yz^2)(\frac{\partial z}{\partial x})$
$+(2x^2+4x^2yz+2xy^2z+2x^4+2x^2yz^2+x^3y+xy^2z^2-2xyz$
$-6x^2z-2yz^3-2x^3z-2xyz^3-2yz)(\frac{\partial z}{\partial y})+3xx+2xxzz$
$+x^4+x^2yz^2+x^3y+xy^2z^2-xz^2-3x^3-z^2=0$. Je trouve par la méthode exposée ci-dessus $\psi=x^2+yz^2$, $\psi=x$. Je fais donc $\psi''=(x^2+yz^2)^m x^n$, ce qui donne
$l\psi''=nl(x^2+yz^2)+nlx$, $(\frac{\partial\psi''}{\partial x})=\frac{2myz}{x^2+yz^2}+\frac{n}{x}$,
$\underbrace{(\frac{\partial\psi''}{\partial y})}_{\psi''}=\frac{mz^2}{x^2+yz^2}$, $\underbrace{(\frac{\partial\psi''}{\partial z})}_{\psi''}=\frac{2myz}{x^2+yz^2}$. On aura donc la valeur de

$$\frac{P(\frac{\partial\psi''}{\partial x})+Q(\frac{\partial\psi''}{\partial y})-R(\frac{\partial\psi''}{\partial z})}{\psi''}$$

$=m(-2x^3+4x^2z+2x^2z^2-2x^2yz+2xyz+xyz^2-2xz^3-2xy^2z-2z^3)$
$+n(2yz+2z^3+2x^2z+2yz^3-z^2-2xyz-x^3-xyz^2)=M$.
L'équation en ψ sera donc
$$P(\frac{\partial\psi'}{\partial x})+Q(\frac{\partial\psi'}{\partial y})-R(\frac{\partial\psi'}{\partial z})+M=0.$$
La valeur de M me donne la forme de ψ, et je fais $\psi'=\frac{\Phi'}{\pi'}$, ayant
$\Phi'=Ax^3+Bx^2z+Cx^2z^2+Dx^2yz+Exyz^2+Fxyz^2$
$+Gxz^3+Hxy^2z+lyz+Kz^3+Lyz^3+Mz^4$;
$\pi'=ax^3+bx^2z+cx^2z^2+dx^2yz+exyz+fxyz^2+gxz^3$
$+hxy^2z+iyz+kz^3+lyz^3+mz^4$.
Substituant cette valeur dans l'équation de condition, on trouve $D=F=H=e=m=n=1$,
ce qui donne $\psi'=\frac{x^2yz+xy^2z+zyz^2}{xyz}=x+y+z$.
On a donc $\psi'=(x^3+xyz^2)e^{x+y+z}$.
On trouve aussi $D=H=L=i=m=1$, $n=0$,

ce

ce qui donne $\psi' = \frac{x^2yz + xy^2z + yz^3}{yz} = x^2 + xy + z^2$.
On a donc $\psi = (x^2 + yz^2)\, e^{x^2+xy+z^2}$.
L'intégrale est donc $(x^2 + yz^2)\, e^{x^2+xy+zz} = F : (x^3 + xyzz)\, e^{y+y+z}$, comme on l'a trouvé dans le §. cité.

§. 36. Soit l'équation du §. 40.
$(\nu\varrho x + 2\nu xy^2 + \varrho xz - \tau xy - 2xy^2z + 2xyz^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$
$+ (\mu\tau y + 2\mu yz^2 + 2\nu x^2y + \tau xy + 2xyz^2 - 2x^2yz)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$
$+ \mu\varrho z + \varrho xz + 2\mu y^2z + 2xy^2z - 2x^2yz = 0$. On trouve par la méthode exposée ci-dessus $\psi = x$, $\psi = y$, $\psi = z$.
Donc $\psi'' = x^m y^n z^p$, ce qui donne $l\psi'' = mlx + nly + zlp$,

$$\underset{\psi''}{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)} = \frac{m}{x},\ \underset{\psi''}{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)} = \frac{n}{y},\ \underset{\psi''}{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)} = \frac{p}{z}.$$

On a donc $P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) = M.$
$\underset{\psi''}{\phantom{P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)}}$
et l'équation deviendra $P\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) + M = 0$.
Or on a ici
$M = m\,(\nu\varrho + 2\nu y^2 + \varrho z - \tau y + 2y^2z - 2yz^2)$
$+ n\,(\mu\tau + 2\mu z^2 - 2\nu x^2 + \tau x + 2xz^2 - 2x^2z)$
$- p\,(\mu\varrho + \varrho x + 2\mu y^2 + 2xy^2 - 2x^2y) = 0$.
On a, en prenant pour ψ' la forme de M, $\psi' = \frac{\Phi'}{\pi'}$, et
$\Phi' = A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + Hy^2z + Iyz^2 + Kxz^2 + Lx^2z + Mxy^2 + Nx^2y$,
$\pi' = a + bx + cy + dz + ex^2 + fy^2 + gz^2 + hy^2z$
$+ iyz^2 + kxz^2 + lx^2z + m'xy^2 + n'x^2y$.
On trouve en substituant ces valeurs dans l'équation de condition : $B = C = D = a = 1$,

et

et tous les autres coëfficiens nuls, $n = o$, $m = \mu$, $p = \nu$. Donc $\psi' = x + y + z$, et l'on a $\psi = x^{\mu} z^{\nu} e^{x+y+z}$. On trouve aussi $E = F = G = a = 1$, $m = o$, $n = \varrho$, $p = \tau$. Donc $\psi = x^2 + y^2 + z^2$, $\psi = y^{\varrho} z^{\tau} e^{x^2+y^2+z^2}$. L'intégrale est $x^{\mu} z^{\nu} e^{x+y+z} = F : y^{\varrho} z^{\tau} e^{x^2+y^2+z^2}$, comme dans le §. cité.

§. 37. Soit l'équation

$$(xx + xz\,x^2y + xyz + xy + xy^2 + y^2z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (yz + xyz + y^2z - xy - yy)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + xz + 'zz + 2xyz + 2yz^2 + x^2z + xz^2 + x^2yz + xyz^2 + y^2z^2 + xy^2z - yz = o,$$

du §. cité.

On trouve par la méthode exposée ci-dessus

$$\psi = x + y,\ \psi = x + z,\ \psi = y,\ \psi = z.$$

Je fais donc $\psi'' = (x+y)^m (x+z)^n y^p z^q$,

ce qui donne $l\psi'' = ml(x+y) + nl(x+z) + ply + qlz$.

Donc $\underbrace{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)}_{\psi''} = \frac{m}{x+y} + \frac{n}{x+z}$, $\underbrace{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)}_{\psi''} = \frac{n}{x+y} + \frac{p}{y}$, $\underbrace{\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}_{\psi''} = \frac{n}{x+z} + \frac{q}{z}$.

On a donc $\underbrace{P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}_{\psi''} = m(x - y + z + xy + 2yz) + n(x + y - z + xy - xz - 2yz + y^2 - y^2z - xyz) + p(z + xz + yz - x - y) - q(x + z + 2xy + 2yz + x^2 + xz + x^2y + xyz + y^2z + xy^2 - y) = M$. On a maintenant l'équation $P\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + 2Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) + M = o$. La valeur de M fournira la forme de ψ', et si l'on prend seulement le coëfficient de m, on aura

$$\psi' = \frac{Ax + By + Cz + Dxy + Eyz}{ax + by + cz + dxy + eyz},$$

on trouve en substituant cette valeur dans l'équation de con-

condition, $D = a = 1$, $m = 0$, $n = p = 1$, $q = 0$, ce qui donn $\psi' = \frac{xy}{x} = y$, $\psi = (x + z)\, ye^y$. On trouve aussi $D = b = 1$, $n = 0$, $p = 0$, $m = q = 1$, ce qui donne $\psi' = \frac{xy}{y} = x$, $\psi = (x + y)\, ze^x$. L'intégrale est donc $(x + y)\, ze^x = F : (x + z)\, ye^y$, comme dans le §. cité.

§. 38. Soit l'équation du §. 48.

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R = 0,$$

où $P = -x^3y^4 + x^3z^4 - x^2yz^4 + xy^6 + xy^5z^4 + 2x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^2y^4z$
$+ 2x^4yz^2 + 2x^3yz^3 - 2x^4y^2z + 2x^3y^3z + 2x^2y^2z^3$;

$Q = -3x^2y^5 - 4x^2y^3z^2 - x^2yz^4 + 3xy^6 + 3xy^5z^4 - y^7$
$- y^3z^4 + xy^5z + xyz^5 - 2x^4y^3 - 4x^4yz^2 + 4x^3y^4$
$+ 10z^2x^3y^2 - 2x^3y^3z + 2x^2y^4z + 2x^2y^2z^3$;

$R = -x^2y^4z + xz^6 - 3xy^5z - 3xyz^5 + y^6z + y^5z^2$
$- xy^4z^2 - xz^6 - 2x^4y^2z + 4x^3y^3z + 2x^3y^2z^2$
$- 2x^2y^3z^2 - 2x^2yz^4 - 2x^3yz^3$.

On trouve par la méthode exposée ci-dessus $\psi = x$, $\psi = y$, $\psi = z$. Je fais donc $\psi'' = x^m y^n z^p$ et j'obtiens la valeur de

$$\frac{P\left(\frac{\partial \psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial \psi''}{\partial z}\right)}{\psi''} = \frac{mP}{x} + \frac{nQ}{y} - \frac{pR}{z} = M.$$

J'ai maintenent l'équation

$$P\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right) M = 0,$$

La valeur de M donnera la forme de ψ', et prenant seulement les termes contenus dans P, on a $\psi' = \frac{\Phi'}{\pi'}$, où

$\Phi' = Ax^3y^4 + Bx^3z^4 + Cx^2yz^4 + Dxy^6 + Exy^2z^4 + Fx^5y^2$
$+ Gx^4y^3 + Hx^2y^4z + Ix^4yz^2 + Kx^3yz^3 + Lx^4y^2z + Mx^3y^3z + Nx^2yz^3$;

$\pi' = ax^3y^4 + bx^3z^4 + cx^2yz^4 + dxy^6 + exy^2z^4 + fx^3y^2 + gx^4y^3 + hyz^6 + ix^4yz^2 + kx^2yz^3 \quad lx^4yz + mx^3y^2z \quad nxy^2z^3$. Substituant cette valeur dans l'équation de condition on trouve $H = L = h = n' = 0$, et tous les autres coéfficiens nuls, $m = 0$, $n = 1$, $p = -1$, ce qui donne $\psi' = \frac{x + y^2}{y^2 + z^2}$, donc $\psi = \frac{y}{z} e^{\frac{x + y^2}{y^2 + z^2}}$. On trouve aussi $C = N = 1$, $k = 1$, $n' = -1$, et tous les autres coéfficiens nuls, $m = p = 1$, $n = 0$, ce qui donne $\psi' = \frac{y + z}{x - y}$, $\psi = xze^{\frac{y}{x - y}}$. L'intégrale sera donc $xze^{\frac{y + z}{x - y}} = F : \left(\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} e^{\frac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2}}\right)$, comme dans le §. cité.

§. 29. Si l'équation ne contient point de terme exemt des différences partielles, la méthode général ne laisse pas de s'y appliquer. Soit d'abord l'équation à trois variables

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

l'équation de condition devient

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0,$$

à laquelle on satisfait évidemment en faisant $\psi = f : z$, donc on peut faire z constant dans la recherche de l'autre valeur de ψ, dès lors l'équation $Pdy - Qdx = 0$, sera traitable immédiatement. Ainsi l'équation

$$(x^2 + 3yz^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - (2xy + z^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

donne l'équation $(x + 3yz)dy - (2xy + z^2)dx = 0$. Intégrant en faisant z constant, on a $\psi = x^2y + y^3z^2 + xz^3$. L'intégrale complète est donc $xy + y^3z + xz^3 = F : z$. On aurait

aurait trouvé le même résultat par la méthode générale. On pourrait objecter que si ψ renferme une fonction de z seul cette méthode générale ne la donnera pas. Mais je réponds que cette fonction est inutile, puisqu'il est évident que l'équation $\Phi + f : z = F : z$, n'a pas plus d'extension que l'équation $\Phi = F : z$.

§ 40. Soit l'équation à quatre variables

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

On satisfait à l'équation de condition, en faisant $z = f : v$, puisqu'elle est

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0.$$

Donc dans la recherche de ψ on peut considérer v comme constant. Il en sera de même, quel que soit le nombre des variables.

§. 41. Au reste il est évident que si les fonctions de l'intégrale complète ne contiennent une ou plusieurs variables qu'au premier degré, elles disparaîtront dans l'équation, et par conséquent ne se reproduisent par aucune des operations de la méthode générale. Mais il est toujours aisé de les remplacer, en les faisant entrer dans la valeur de ψ avec un coefficient indéterminé. Ainsi, par exemple l'équation

$$(1 - 2z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (4xz - 1)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2x - 1 = 0,$$

donne l'équation de condition

$$(1 - z)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + (4xz - 1)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - (2x - 1)\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0.$$

On a, en prenant la forme des termes de $P + Q + R$, $\psi = 1 + x + z + xz$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 + z + (1 + x)\frac{\partial z}{\partial x} =$ (en mettant pour $\frac{\partial z}{\partial x}$ la valeur $-\frac{R}{P}$ et reduisant au même dénominateur) $1 + x + x^2 + z^2$. Il est donc évident que l'on ne trouvera

jamais de y. Cependant l'on ne peut pas faire $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = 0$; je fais donc $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = a$, ce qui donne $\psi = ay$, et j'introduis cette valeur dans celle de ψ. J'ai donc $y = A + \{Bx + Cz + Dx^2 + Ez^2 + ay$, et je trouve en pratiquant la méthode: 1.), $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 1$, $E = 0$, $a = 1$; 2) $A = 0$, $B = 1$, $D = 0$, $E = 1$, $a = 1$. L'intégrale est donc $x^2 + y + z = F : (y + x + z^2)$. On fera des remarques analogues sur les équations à plus de trois variables; mais comme cela n'a pas de difficulté, je ne m'y arrête pas pour ne pas allonger inutilement ce Mémoire.

RECHER-

RECHERCHES
SUR LA SPHÈRE ET LE CYLINDRE
PERCÉS CYLINDRIQUEMENT,

et sur une infinité de manières de percer la Sphère de façon que le résidu de sa surface et de sa solidité soit géométriquement assignable.

PAR
NICOLAS FUSS.

Presenté à l'Academie le 16 Avril 1800.

§. 1.

En parcourant dernièrement le sixième Tome du Magazin encyclopédique rédigé par M. *Millin*, j'ai lu avec le plus grand intérêt la lettre du C. *Verkaven* au redacteur, sur le Traité de calcul différentiel & de calcul intégral du celèbre *Bossut*, qui avoit paru depuis peu. À la fin de cette lettre l'auteur fait mention d'un très beau théorême qui se trouve dans l' Appendice de cet ouvrage et qu'il anonce ainsi: *Si l'on perce une Sphère, perpendiculairement au plan de l'un de ses grands cercles, par deux cylindres droits en forme de tarières, dont les axes passent par les milieux des deux rayons qui composent le diamètre de ce grand cercle, les deux portions qu'on enlèvera par là du Solide entier de la Sphère laisseront un reste qui est égal aux deux neuvièmes du cube du diamètre de la Sphère.* (Magazin encyclopédique, année 4me Tome VI. page 160). Frappé de cette belle propriété, je

désirai vivement d'en voir la démonstration; mais dans l'impossibilité d'obtenir de sitôt l'ouvrage qui la renferme il ne me resta, pour satisfaire mon impatience, d'autre parti à prendre que de la chercher moi même. Cette recherche en a entrainé d'autres et m'a conduit successivement à plusieurs autres théorèmes relatifs tant à la Sphère qu'au cylindre percés de trous à bases circulaires et non circulaires. Quelques-uns de ces théorèmes sont, à la vérité, déjà connus; mais en rassemblant dans ce mémoire tout ce que cette recherche m'avoit suggéré, j'ai pensé ne pas devoir les omettre, à cause de leur liaison naturelle avec les théorèmes nouveaux, et à cause de l'uniformité instructive des méthodes qui ont conduit à la démonstration des uns & des autres. C'est ainsi qu'on trouvera ici, outre la démonstration du théorème mentionné de *Bossut*, aussi celle du théorème de *Viviani* et de celui dont *Montucla* parle en citant l'*aenigma geometricum* de *Viviani* (Hist. des Mathématiques, Tome II. p. 41) Mais on trouvera aussi que le fameux théorème de Florence et le théorème plus nouveau de *Bossut* ne sont qu'un cas très particulier d'une propriété beaucoup plus générale qui sera démontrée à la fin de ce mémoire.

Théorème I.

Tab. III. Fig. I.

§. 2. *Si à travers une Sphère, dont ADBE est un grand cercle, on fait passer, perpendiculairement au plan de ce grand cercle, deux cylindres, dont les diamètres sont AC, CB, moitiés du diamètre AB, la portion de la Sphère qui reste sera égale en solidité aux deux neuvièmes du cube de la Sphère.*

Démon-

Démonstration.

Soit le rayon de la Sphère, ou le diamètre de chaque cylindre, $CA = BA = a$; et en tirant dans la base de l'un du point C, deux cordes infiniment proches CP et Cp, soit l'angle $BCP = \Phi$, nous aurons l'angle $PCp = d\Phi$, et la corde $CP = a\cos\Phi$. Du point C, pour centre, avec les rayons $CX = v$ et $Cx = v + dv$ décrivons, dans le plan du grand cercle, entre les cordes CP, Cp, les arcs XY et xy, et en X concevons érigée sur le plan ADBE la perpendiculaire XZ, rencontrant la surface de la Sphère en Z; et l'élément de la solidité du cylindre qui insiste perpendiculairement à la base circulaire CPBG sera le prisme ayant $XYyx = v\,dv\,d\Phi$ pour base et $XZ = \sqrt{CZ^2 - CX^2} = \sqrt{aa - vv}$ pour hauteur. Ainsi cet élément de la solidité sera égal à $v\,dv\,d\Phi\sqrt{aa - vv}$.

Désignons par S la solidité du cylindre qui passe par le cercle CPBG et qui est terminé de part et d'autre par la Sphère, et nommons S la solidité qui reste à la Sphère après la perforation, desorte que $S = \frac{\pi A^3}{6} - 2S$, et nous aurons $\frac{1}{4}S = \int d\Phi \int v\,dv\sqrt{aa - vv}$, en prenant l'intégrale $\int v\,dv\sqrt{aa - vv}$ depuis $v = 0$ jusqu'à $v = CP = a\cos\Phi$, et puis l'intégrale $\int d\Phi \int v\,dv\sqrt{aa - vv}$, depuis $\Phi = 0$, jusqu'à $\Phi = BCD = 90°$.

Or comme $\int v\,dv\sqrt{aa - vv} = C - \frac{1}{3}(aa - vv)^{\frac{3}{2}}$, la constante C étant déterminée conformément au terme d'intégration prescrit $v = \ldots$, on aura $C = \frac{1}{3}a^3$ et partant

$$\int v\,dv\sqrt{aa - vv} = \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{3}(aa - vv)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui étant étendu jusqu'à l'autre terme *ad quem* $v = a\cos\Phi$ nous donne

$$\int v\,dv\sqrt{aa - vv} = \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{3}(aa - aa\cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}$$

ou bien nous aurons pour les deux termes d'intégration marqués

$\int v\,dv$

$$\int v\partial v\sqrt{aa-vv}\left[\begin{array}{l}\text{depuis } v=0\\ \text{jusqu'à } v=a\cos\Phi\end{array}\right]=\tfrac{1}{3}a^3(1-\sin\Phi^3),$$

En multipliant donc par $\partial\Phi$ et prenant de nouveau l'intégrale, nous aurons

$$\int\partial\Phi\int v\partial v\sqrt{aa-vv}=C+\tfrac{1}{3}a^3\Phi+\tfrac{1}{3}a^3(\tfrac{2}{3}\cos\Phi+\tfrac{1}{3}\sin\Phi^2\cos\Phi)$$

ce qui devant évanouir au terme *a quo* $\Phi=0$, fait voir que $C=-\frac{2}{9}a^3$, ce qui étant substitué à la place de C, en faisant à la fois $\Phi=90°$, nous fournit

$$\int\partial\Phi\int v\partial v\sqrt{aa-vv}\left[\begin{array}{l}\text{depuis } \Phi=0\\ \text{jusqu'à } \Phi=90°\end{array}\right]=\frac{\pi a^3}{6}-\frac{2}{9}a^3$$

de sorte que $S'=\frac{4\pi a^3}{6}-\frac{8}{9}a^3$ et $2S'=\frac{8\pi a^3}{6}-\frac{16}{19}a^3=\frac{\pi AB^3}{6}-\frac{2}{9}AB^3$, donc la solidité qui reste à la Sphère après la perforation

$$S=\frac{\pi AB^3}{6}-2S'=\tfrac{2}{9}AB^3$$

C. Q. F. D.

Scholie.

§. 3. Voici donc le théorème de *Bossut* démontré. C'est certainement une propriété bien remarquable de la Sphère, qu'étant ainsi percée, non seulement le résidu de sa surface et la surface intérieure des deux excavations soient géométriquement assignables, mais aussi le résidu de la solidité de la Sphère. Comme la démonstration des deux premières propriétés dont nous venons de parler, est, pour ainsi dire, déjà toute préparée par la démonstration précédente, et qu'il sera peut-être agréable à quelques uns de nos lecteurs de trouver ici toutes les trois propriétés ensemble et démontrées d'après les mêmes principes, nous allons aussi rapporter les deux théorèmes suivans:

Théo-

Théorème 2.

§. 4. La portion qui reste de la surface de la Sphère, après ce qui en a été enlevé par les deux excavations cylindriques, est égal à deux fois le quarré du diamètre de la Sphère.

Démonstration.

Transférons en idée l'élément $XYyx$ et le point C à la surface de la Sphère, et à la ligne droite $CX = v$ il y répondra un arc $CX = a\,A \sin \frac{a}{v}$, et à l'élement Xx répondra un arc $Xx = \frac{a\partial v}{\sqrt{aa-vv}}$, l'arc XY restant $= v\partial\Phi$. L'élément de la surface enlevée par un cylindre sera donc $= \frac{av\partial v\,\partial\Phi}{\sqrt{aa-vv}}$. En nommant donc $\mathfrak{S}'$ l'une des quatre portions enlevées de la Sphère et $\mathfrak{S}$ la surface qui reste, de sorte que $\mathfrak{S} = \pi AB^2 - 4\mathfrak{S}'$, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{S}' = a\int\partial\Phi\int\frac{v\partial v}{\sqrt{aa-vv}}\begin{bmatrix}\text{depuis } o = v\\ \text{jusqu'à } v = a\cos\Phi\end{bmatrix}$$

$$\text{et}\begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = o\\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{bmatrix}$$

Or $$\int\frac{v\partial v}{\sqrt{aa-vv}}\begin{bmatrix}\text{depuis } v = o\\ \text{jusqu'à } v = a\cos\Phi\end{bmatrix} = a - a\sin\Phi$$

et $$\int\partial\Phi\int\frac{v\partial v}{\sqrt{aa-vv}}\begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = o\\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{bmatrix} = \frac{a\pi}{2} - a,$$

donc $\frac{1}{2}\mathfrak{S}' = \frac{\pi a^2}{2} - aa$ et par conséquent $4\mathfrak{S}' = 4\pi a^2 - 8a^2a = \pi AB^2 - 2AB^2$, d'où il suit que le résidu de la surface $\mathfrak{S} = \pi . AB^2 - 4\mathfrak{S}' = 2AB^2$.

C. Q. F. D.

Théorème 3.

§. 5. *La surface intérieure d'une excavation cylindrique de la Sphère ainsi percée est égale au quarré du diamètre.*

Démonstration.

Tirons les rayons FP et Fp, et à cause de l'angle $PFp = 2 . PCp = 2\partial\Phi$ et $FP = \frac{1}{2}a$, nous aurons l'arc $Pp = a\partial\Phi$. En P et p conçevons érigées les droites PQ et pq, perpendiculaires au plan ADBE, et rencontrant la surface de la Sphère en Q et q, et à cause de

$$PQ = \sqrt{CQ^2 - CP} = \sqrt{aa - aa\cos\Phi^2} = a\sin\Phi,$$

l'élément de la surface intérieure cherchée sera $PQqp = Pp . PQ = aa\partial\Phi\sin\Phi$. Soit Σ la surface entière de l'excavation, et nous aurons

$$\tfrac{1}{4}\Sigma = aa\int\partial\Phi\sin\Phi \begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{bmatrix} = aa,$$

donc $\Sigma = 4aa = AB^2$.

C. Q. F. D.

§. 6. Ainsi la surface intérieure des deux excavations, prises ensemble, est égale au résidu de la surface de la Sphère, et toute la surface de la Sphère ainsi percée est égale à quatre fois le quarré du diamètre.

Scholie.

§. 7. Quoique le contour de l'ouverture faite à la surface de la Sphère par cette excavation ne soit pas géométriquement assignable, elle est néanmoins douée d'une propriété assez remarquable, pour mériter d'être ajoutée ici sous la forme d'un théorème, afin de completter le nombre des propriétés singulières de la Sphère ainsi perforée.

Théo-

Théorème 4.

§. 8. *Le contour de chacune des quatre ouvertures faites à la surface de la Sphère ainsi percée est égal au demi-périmètre d'une ellipse qui a pour demi petit axe le rayon de la Sphère, pris pour unité, et pour demi grand axe la corde du quart du grand cercle de la Sphère.*

Démonstration.

Comme Qq est l'élément de ce contour, en tirant dans l'élément de la surface intérieure $PQqp$ (§. 5.) l'arc Qv parallèle à Pp, il y aura $Qv = Pp = a\partial\Phi$ et $qv = \partial . PQ = a\partial\Phi\cos\Phi$ (§. 5.), donc $Qq = \sqrt{Qv^2 + qv^2} = \partial\Phi\sqrt{1+\cos\Phi^2}$. Soit $\cos\Phi = x$, et comme $\partial\Phi = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}}$, nous aurons $Qq = -\partial x\sqrt{\frac{1+xx}{1-xx}}$. En nommant donc le contour de l'ouverture $= \sigma$, il est évident que

$$\tfrac{1}{2}\sigma = -\int \partial x \sqrt{\tfrac{1+xx}{1-xx}} \begin{bmatrix} \text{depuis } x = 1 \\ \text{jusqu'à } x = 0 \end{bmatrix},$$

ou bien, en changeant les termes d'intégration

$$\tfrac{1}{2}\sigma = +\int \partial x \sqrt{\tfrac{1+xx}{1-xx}} \begin{bmatrix} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = 1 \end{bmatrix},$$

Or si dans une ellipse, dont le demi-grand axe $= AD = \sqrt{2}$ et le demi-petit axe $= AC = 1$, on prend les abscisses du centre et sur le petit axe, on aura $y = \sqrt{2}.\sqrt{1-xx}$ et l'élément de l'arc elliptique $= \partial y\sqrt{\frac{1+xx}{1-xx}}$. Soit s le périmètre de l'ellipse, et comme

$$s = \int \partial x \sqrt{\tfrac{1+xx}{1-xx}} \begin{bmatrix} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = 1 \end{bmatrix},$$

il est clair que $\frac{1}{2}\sigma = \frac{1}{4}s$ et $\sigma = \frac{1}{2}s$.

C. Q. F. D.

Corollaire.

§. 9. De là il suit que le contour de chacune des quatre ouvertures égales faites à la surface de la Sphère pourra être exprimé par cette série extrêmement convergente :

$$\sigma = \pi \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \left[1 + \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{1}{9} - \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{3.5}{8.8} \cdot \tfrac{1}{81} - \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{3.5}{8.8} \cdot \tfrac{7.9}{12.12} \cdot \tfrac{1}{729} - \text{&c.}\right]$$

qui donne $\sigma = 3,8202$.

Scholie.

§. 10. D'une manière parfaitement semblable on peut aussi déterminer la solidité, la surface et le contour de l'excavation d'un cylindre, traversé d'un autre de même diamètre, de manière que leurs axes se coupent à angles droits. Il en résulte des théorèmes analogues à ceux que nous venons de démontrer et non moins remarquables. Les voici dans le même ordre.

Théorème 5.

Tab. III. Fig. 2

§. 11. *Si un cylindre droit est percé d'un autre de même épaisseur, de manière que leurs axes se coupent perpendiculairement, la solidité de la portion enlevée du cylindre ainsi percé sera égale aux deux tiers du cube du diamètre.*

Démonstration.

Soit le parallélogramme FGHI, passant par l'axe du cylindre percé, la section longitudinale faite perpendiculairement au cylindre traversant, et soit le cercle ADBC l'ouverture que ce cylindre a fait dans le plan FGHI, dans lequel soyent tirés deux rayons infiniment proches $CP = Cp = a$, et en nommant l'angle $BCP = \Phi$, nous aurons $PCp = \partial\Phi$ et l'arc $Pp = a\,d\Phi$. Du centre C, avec les rayons $CX = v$ et

et $Cx = v + \partial v$ conçevons décrits les arcs XY et xy, et comme $XY = v\partial\Phi$ et $Xx = \partial v$, la surface $XYyx$ sera $= v\partial v\partial\Phi$, à laquelle si nous conçevons insister un prisme de la hauteur XZ perpendiculairement, ce prisme sera l'élément de la solidité. Or si par X on tire, dans le demicercle ADB, VT perpendiculaire au diamètre AB, il est clair que

$$XZ = VT = \sqrt{VA \cdot VB}$$

Or comme $CV = v\cos\Phi$, on aura

$$VA = CA + CV = a + v\cos\Phi$$
$$VB = CB - CV = a - v\cos\Phi,$$

d'où l'on tire la hauteur

$$XZ = \sqrt{aa - vv\cos\Phi^2}$$

qui multipliée par la base du prisme $XYyx = v\partial v\partial\Phi$ fournit l'élément de la solidité

$$= v\partial v\partial\Phi\sqrt{aa - vv\cos\Phi^2},$$

En nommant donc S la solidité de la portion du cylindre traversant, comprise dans le cylindre traversé et coupée en deux parties égales par le plan du cercle ADBG, nous aurons

$$\tfrac{1}{4}S = \int v\partial v\partial\Phi\sqrt{aa - vv\cos\Phi^2},$$

en étendant cette intégrale, pour la variabilité de v, depuis $v = 0$ jusqu'à $v = a$, et pour la variabilité de Φ depuis $\Phi = 0$ jusqu'à $\Phi = 180°$.

Faisons d'abord varier la seule v, et comme

$$\int v\partial v\sqrt{(aa - vv\cos\Phi^2)} = C - \left(\frac{aa - vv\cos\Phi^2}{2\cos\Phi^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

en

en mettant $v = c$, nous aurons $C = \frac{a^3}{3\cos\Phi^2}$, donc

$$\int v\partial v\sqrt{aa - vv\cos\Phi^2}\left[\begin{matrix}\text{depuis } v = 0\\ \text{jusqu'à } v = a\end{matrix}\right] = \frac{a^3}{3\cos\Phi^2} - \frac{a^3\sin\Phi^3}{3\cos\Phi^2},$$

de sorte que

$$\tfrac{1}{4}S = \tfrac{a^3}{3}\int\frac{\partial\Phi}{\cos\Phi^2} - \tfrac{a}{3}\int\frac{\partial\Phi\sin\Phi^3}{\cos\Phi^2}\left[\begin{matrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ\end{matrix}\right].$$

Or $\int\frac{\partial\Phi}{\cos\Phi^2} = \operatorname{tg}\Phi$ et $\int\frac{\partial\Phi\sin\Phi^3}{\cos\Phi^2} = \frac{1}{\cos\Phi} + \cos\Phi$, donc

$$\tfrac{1}{4}S = C + \tfrac{1}{3}a^3\left(\operatorname{tg}\Phi - \tfrac{1}{\cos\Phi} - \cos\Phi\right).$$

En mettant donc $\Phi = 0$ nous aurons $C = \frac{2}{3}a^3$, et en mettant $\Phi = 180^\circ$, il en résulte $\frac{1}{4}S = \frac{4}{3}a^3$, donc $= \frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3}AB^3$.

C. Q. F. D.

Théorème 6.

§. 12. *La surface intérieure d'excavation du cylindre ainsi percé est égale à deux fois le quarré du diamètre du cylindre.*

Démonstration.

Soyent PQ et pq deux perpendiculaires érigées en P et p sur le plan FGHI et terminées à la surface du cylindre; et comme $Pp = ad\Phi$ et $PQ = PQ$ (perpendiculaire abaissée de P sur le diamètre AB), l'élément de la surface sera $PQqp = Pp \cdot PQ = aad\Phi\sin\Phi$.

Soit Σ la surface entière en question, et la surface du parois de l'excavation insistant autour du demi-cercle ADB et terminé à la surface du cylindre percé sera

$$\tfrac{1}{4}\Sigma = aa\int\partial\Phi\sin\Phi\left[\begin{matrix}\text{depuis } \Phi = 0^\circ\\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ\end{matrix}\right] = 2aa,$$

donc $\Sigma = 8aa = 2AB^2$.

C. Q. F. D.

Théo-

Théorème 7.

§. 13. *La portion de la surface du cylindre enlevée par la perforation est égale à deux fois le quarré du diamètre du cylindre.*

Démonstration.

Que le demi-cercle ADB, qui dans les deux théorémes précédens représentait la demie ouverture faite dans le plan FGHI, soit à présent la demie section du cylindre faite perpendiculairement au plan FGHI, alors $\frac{XY\gamma x}{\sin VTK} = \frac{v\partial v\partial\Phi}{\cos CTV} = \frac{av\partial v\partial\Phi}{\sqrt{aa - vv\cos\Phi^2}}$, sera l'élément de la surface enlevée. Or en prenant d'abord Φ constant, nous aurons la première intégrale :

$$\int \frac{v\partial v}{\sqrt{aa - vv\cos\Phi^2}} \begin{bmatrix} \text{depuis } v = 0 \\ \text{jusqu'à } v = a \end{bmatrix} = \frac{a}{\cos\Phi^2} - \frac{a\sin\Phi}{\cos\Phi^2} = \frac{a}{1+\sin\Phi}.$$

En nommant donc toute la surface emportée $= \mathfrak{S}$, il est évident que $\frac{1}{4}\mathfrak{S} = aa\int \frac{\partial\Phi}{1+\sin\Phi} \begin{bmatrix} \text{depuis } \Phi = 0 \\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ \end{bmatrix} = 2aa$, partant $\mathfrak{S} = 8aa = 2AB^2$. C. Q. F. D.

Scholie.

§. 14. J'aurois pu déduire cette vérité du théorème précédent, en observant que les deux surfaces indiquées par $\mathfrak{S}$ et Σ sont permuables, vu que ce qui est $\mathfrak{S}$ pour le cylindre traversé devient Σ pour le cylindre traversant, et que, ces deux cylindres étant égaux, il y a nécessairement $\mathfrak{S} = \Sigma$. Mais j'ai préféré la démonstration bien courte tirée de nos

nos formules mêmes, parcequ'elle nous servira dans la suite, et parceque la peine d'interroger l'analyse, lors même que la réponse qu'elle doit donner est connue d'avance, n'est jamais entièrement perdue.

Théorème 8.

§. 15. *Le contour de chacune des deux ouvertures faites à la surface du cylindre ainsi percé est égal au périmètre d'une ellipse qui a pour demi-grand axe la corde du quart de cercle AD et pour demi-petit axe le rayon du cylindre.*

Démonstration.

Comme Qq est l'élément de ce contour, nous aurons, comme §. 8, $Qq = \sqrt{Qv^2 + qv^2}$.
Or $Qv = Pp = a\partial\Phi$ et $qv = \partial . PQ = a\partial\Phi \cos\Phi$, donc $Qq = a\partial\Phi\sqrt{1 + \cos\Phi^2}$, ou bien, en prenant le rayon a pour unité et mettant $\cos\Phi = x$, $Qq = -\partial x \sqrt{\frac{1+xx}{1-xx}}$.
Soit σ le contour de l'ouverture antérieure, et nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\sigma = -\partial x \sqrt{\tfrac{1+xx}{1-xx}} \left[\begin{matrix}\text{depuis } x = 1\\ \text{jusqu'à } x = -1\end{matrix}\right],$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\tfrac{1}{2}\sigma = +\int \partial x \sqrt{\tfrac{1+xx}{1-xx}} \left[\begin{matrix}\text{depuis } x = -1\\ \text{jusqu'à } x = +1\end{matrix}\right].$$

Or si dans une ellipse dont le demi-grand axe $= AD = \sqrt{2}$ et le demi-petit axe $= AC = 1$, les abscisses sont prises sur le petit axe, et du centre, on a $y = \sqrt{2} . \sqrt{1 - xx}$ et l'élément de l'arc $= \partial x \sqrt{\frac{1+xx}{1-xx}}$; desorte que, si s marque le périmètre, il y ait $\frac{s}{2} = \int \partial x \sqrt{\frac{1+xx}{1-xx}} \left[\begin{matrix}\text{depuis } x = -1\\ \text{jusqu'à } x = +1\end{matrix}\right] = \frac{\sigma}{2}$.

C. Q. F. D.

Scholie

Scholie 1.

§. 16. Cette vérité découle encore fort naturellement de la considération que si l'on coupe le cylindre par un plan perpendiculaire à FGHI et faisant avec le côté un angle de 45°, la section de ce plan avec le cylindre sera égale au contour de l'ouverture du cylindre percé de la manière prescrite. Or cette section est une ellipse, dont le demi-grand axe = AD et le demi-petit axe = AC, donc etc.

Scholie 2.

§. 17. Ayant ainsi rassemblé et démontré d'une manière uniforme et facile toutes ces propriétés remarquables, nous allons généraliser nos recherches, en considérant la Sphère et le cylindre percés où l'on voudra, et avec une tarière quelconque, perpendiculairement toutefois à un plan passant par le centre de la sphère et par l'axe du cylindre. C'est-à-dire, nous chercherons les formules générales qui expriment la solidité, les deux surfaces et le contour des excavations qui en proviennent. Quoique ces expressions générales ne seront susceptibles de développement que par les voyes connues d'approximation, elles ne laisseront pas d'avoir leur utilité.

Problème 1.

§. 18. *Une Sphère étant percée d'outre en outre avec une tarière cylindrique quelconque et dans une direction quelconque, trouver le contour et la surface de l'excavation, la surface et la solidité enlevées à la Sphère par cette perforation.*

Solution.

Tab. III. Fig. 3. Soit AUBW le plan du grand cercle de la Sphère, passant perpendiculairement par l'axe de la tarière, qui en est coupé en F. Soit le rayon de la Sphère $EA = EB = a$, le rayon de la tarière $FC = FD = b$ et $AC = c$. Soit σ le contour de l'ouverture faite à la surface de la Sphère, Σ la surface intérieure de l'excavation, $\mathfrak{S}$ la surface emportée et S la solidité emportée de la Sphère, et ces quatre quantités seront déterminées de la manière suivante :

I. Détermination du contour σ.

Les lignes CP, Cp, PQ, pq et l'arc Qv ayant été tirées comme dans la fig. I., nous aurons $P\!p = Qv = 2b\partial\Phi$ et $CP = 2b\cos\Phi$. Par P soit tirée, dans le plan du grand cercle, la corde ST perpendiculairement au diamètre AB qu'elle coupe en R, et il est clair que $PQ = \sqrt{PS.PT}$. Or $PS = RS - PR$ et $PT = RS + PR$, donc $PQ = \sqrt{(RS^2 - PR^2)}$. Mais $RS^2 = RA.RB$, et comme $CR = CP\cos\Phi = 2b\cos\Phi^2 = b + b\cos 2\Phi$ et $PR = CP\sin\Phi = 2b\sin\Phi\cos\Phi = b\sin 2\Phi$, nous aurons

$$RA = AC + CR = c + b + b\cos 2\Phi,$$
$$RB = AB - RA = 2a - c - b - b\cos 2\Phi,$$

et de là nous tirons $PQ = \sqrt{ff + gg\cos 2\Phi}$, ayant mis pour abréger $ff = 2(a-b)(b+c) - cc$ et $gg = 2b(a-b-c)$, ce qui nous fournit

$$qv = \partial.PQ = \frac{-gg\partial\Phi\sin 2\Phi}{\sqrt{(ff + gg\cos 2\Phi)}}$$

desorte que l'élément de l'arc

$$Qq = \sqrt{Qv^2 + qv^2} = \partial\Phi\sqrt{\frac{4bb(ff + gg\cos 2\Phi) + g^4\sin 2\Phi^2}{ff + gg\cos 2\Phi}}$$

et

et partant le contour de l'ouverture d'une part

$$\sigma = 2\int \partial\Phi \sqrt{\frac{4bb(ff+gg\cos 2\Phi)+g^4 \sin 2\Phi^2}{ff+gg\cos 2\Phi}} \left[\begin{matrix}\text{depuis } \Phi = 0 \\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{matrix}\right].$$

II. Détermination de la surface Σ.

Comme $PQqp$ est l'élément de cette surface et que $Pp = 2b\,d\Phi$ et $PQ = \sqrt{ff+gg\cos 2\Phi}$, nous aurons cette surface:

$$\Sigma = 4\int 2b\partial\Phi \sqrt{ff+gg\cos 2\Phi} \left[\begin{matrix}\text{depuis } \Phi = 0 \\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{matrix}\right]$$

III. Détermination de la solidité S.

Ayant décrit entre les rayons CP et Cp les arcs XY et xy, avec les rayons $CX = v$ et $Cx = v + \partial v$, l'élément de la solidité sera le prisme insistant perpendiculairement à la base $XYyx = v\partial v\partial\Phi$ et ayant pour hauteur la perpendiculaire XZ terminée en Z par la surface de la Sphère. Pour déterminer cette hauteur, soit tirée par X, dans le plan $ADBE$, la corde UW perpendiculairement au diamètre AB qu'elle coupe en V, et il est clair que $XZ = \sqrt{XU.XW}$. Or $XU = VU - VX$ et $XW = VU + VX$, donc $XZ = \sqrt{VU^2 - VX^2}$. Mais $VU^2 = VA.VB = (a + v\cos\Phi)(2a - c - v\cos\Phi)$ et $VX = v\sin\Phi$, donc $XZ = \sqrt{2ac - cc + 2(a-c)v\cos\Phi - vv}$,

et partant l'élément de la solidité sera

$$v\partial v\partial\Phi \sqrt{(2ac - cc + 2(a-c)v\cos\Phi - vv)}$$

et la solidité enlevée à la Sphère

$$S = 4\int v\partial v\partial\Phi \sqrt{2ac - cc + 2(a-c)v\cos\Phi - vv}$$

$$\left[\begin{matrix}\text{depuis } v = 0 \\ \text{jusqu'à } v = 2b\cos\Phi\end{matrix}\right] \text{ et } \left[\begin{matrix}\text{depuis } \Phi = 0 \\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{matrix}\right].$$

IV. Dé-

IV. Détermination de la surface $\mathfrak{S}$.

Comme l'élément de cette surface est l'intersection du prisme insistant perpendiculairement à la base de $XYyx = v\partial v\partial\Phi$, faite par la surface de la Sphère, cet élément sera à l'élément $XYyx$ comme l'unité est au cosinus de l'inclinaison du plan touchant la Sphère en Z avec le plan du grand cercle AUBW; c'est-à-dire, l'élément de la surface $\mathfrak{S}$ sera $= \frac{v\partial v\partial\Phi}{\cos.\ incl.}$. Soit AHB l'hémisphère insistant au grand cercle AUBW, l'élément $v\partial v\partial\Phi$ en X, XZ la hauteur du prisme élémentaire, EHZK le quart de grand cercle passant par XZ, et ZL sa tangente au point Z, l'élément de la surface $\mathfrak{S}$ sera $\frac{v\partial v\partial\Phi}{\cos.\ LZE}$.

Tab. IV. Fig. 9.

Or $\cos ELZ = \frac{XZ}{EZ} = \sqrt{\frac{2ac - cc + 2(a-c)\cos\Phi - vv}{aa}}$, donc

$$\mathfrak{S} = 4a\int \frac{v\partial v\partial\Phi}{\sqrt{2ac - cc + 2(a-c)(v\cos\Phi - vv}}$$

$$\left[\begin{matrix}\text{depuis } v = 0\\ \text{jusqu'à } = 2b\cos\Phi\end{matrix}\right] \text{ et } \left[\begin{matrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = 90^\circ\end{matrix}\right].$$

Corollaire

§. 19. En mettant $c = a$ et $b = \frac{1}{2}a$, il en résultera pour σ, S, Σ et $\mathfrak{S}$ les mêmes valeurs qui ont été trouvées dans les quatre premiers théorèmes.

Problème 2.

§. 20. *Un cylindre étant percé d'outre en outre avec une tarière d'un diamètre quelconque, et dans une direction quelconque, perpendiculairement toutefois à un plan passant par l'axe, trouver le contour et la surface intérieure de l'excavation, et la surface et la solidité emportées du cylindre.*

Solu-

Solution.

Soit le rayon du cylindre $OA = OB = a$, le rayon de la tarière $CE = CF = b$, l'excentricité $CO = c$; et nommons le contour de l'ouverture faite à la surface du cylindre $= \sigma$, la surface de l'excavation $= \Sigma$, la surface emportée par la tarière $= \mathfrak{S}$ et la solidité emportée $= S$; ces quatre quantités seront déterminées ainsi: Tab. III. Fig. 4.

I. Détermination du contour σ.

Les lignes CP, Cp, PQ, pq et Qv ayant été tirées comme dans la fig. 2. nous aurons l'élément du contour $Qq = \sqrt{Qv^2 + qv}$, où $Qv = Pp = b\partial\Phi$ et $qv = \partial . PQ$, Sur le diamètre AB soit décrit, dans le plan LMNΘ, le demi-cercle AUB, et la perpendiculaire RS, qu'on y mène par P, sera égale à la ligne PQ qui en P insiste perpendiculairement à ce plan LMNΘ; ainsi $PQ = \sqrt{RA . RB}$. Mais $RA = a - c + b\cos\Phi$ et $RB = a + c - b\cos\Phi$ donc $PQ = \sqrt{aa - (c - b\cos\Phi)^2}$ et partant

$$qv = \frac{-b\partial\Phi \sin\Phi (c - b\cos\Phi)}{\sqrt{aa - (c - b\cos\Phi)^2}},$$ d'où l'on tire

$$Qq = \frac{b\partial\Phi \sqrt{aa - \cos\Phi^2 (c - b\cos\Phi)^2}}{\sqrt{aa - (c - b\cos\Phi)^2}}$$ et le contour

$$\sigma = 2b\int\partial\Phi \sqrt{\frac{aa - \cos\Phi^2 (c - b\cos\Phi)^2}{aa - (c - b\cos\Phi)^2}} \left[\begin{array}{l}\text{depuis } \Phi = 0^0 \\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ\end{array}\right].$$

II. Détermination de la surface Σ.

L'élément de cette surface étant $PQqp = Pp . PQ = b\partial\Phi \sqrt{aa - (c - b\cos\Phi)^2}$, la surface de l'excavation sera

$$\Sigma = 4b\int\partial\Phi \sqrt{aa - (c - b\cos\Phi)^2} \left[\begin{array}{l}\text{depuis } \Phi = 0 \\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ\end{array}\right]$$

III. Dé-

III. Détermination de la solidité S.

Ayant décrit du centre C, avec les rayons $CX = v$ et $Cx = v + \partial v$, les ares XY et xy, le prisme qui insiste perpendiculairement à la figure $XYyx$ et qui est terminé à la surface du cylindre, sera l'élément de la solidité. Or
Tab. IV. Fig. 10. la base de ce prisme élémentaire est $XY \,.\, Xx = v\partial\Phi\partial v$ et sa hauteur est XZ, perpendiculaire érigée en X sur le plan LMNΘ et terminée en Z par le demi cercle aZb, demie section du cylindre faite par un plan passant par
Tab III. Fig. 4. XZ parallèlement à AB; desorte que $XZ = \sqrt{Xa \,.\, Xb} = \sqrt{VA \,.\, VB}$. Or $VA = a - c + v\cos\Phi$ et $VB = a + c - v\cos\Phi$, donc $XZ = \sqrt{aa - (c - v\cos\Phi)^2}$ et partant l'élément de la solidité $= v\partial v\partial\Phi\sqrt{aa - (c - v\cos\Phi)^2}$ et la solidite entière.

$$S = 4\int v\partial v\partial\Phi\sqrt{aa - (c - v\cos\Phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix}\text{depuis } v = 0\\ \text{jusqu'à } v = b\end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ\end{bmatrix}$$

IV. Détermination de la surface $\mathfrak{S}$.

Tab. IV. Fig. 10. Tirons dans les demi-cercles aZb et AUB par Z et U les rayons Zo et UO, et les tangentes Zk et UK qui rencontrent les diamètres prolongés ba et BA en k et k; et comme l'élément de la surface $\mathfrak{S}$ est $\frac{v\partial v\partial\Phi}{\cos Zk\,X}$ et que $\cos Zk\,X = \cos UKV = \cos VUO = \frac{UV}{OU} = \frac{\sqrt{aa - (c - v\cos\Phi)^2}}{a}$ nous aurons la surface enlevée du cylindre

$$\mathfrak{S} = 4a\int \frac{v\partial v\partial\Phi}{\sqrt{aa - (c - v\cos\Phi)^2}} \begin{bmatrix}\text{depuis } v = 0\\ \text{jusqu'à } v = b\end{bmatrix}$$

$$\text{et } \begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = 180^\circ\end{bmatrix}$$

Corol-

Corollaire.

§. 21. En mettant $c = o$ et $b = a$, on trouve pour σ, Σ, $\mathfrak{S}$ et S les mêmes valeurs qui ont été rapportées dans les quatre derniers théorèmes.

Schotion.

§. 22. Observons ici, par rapport aux huit formules générales que nous avons trouvées dans ces deux problèmes, que les expressions données pour la surface $\mathfrak{S}$ et la solidité S, dans l'une et l'autre solution, dépendent uniquement de l'élément XYyx et de la hauteur XZ, et ne sont nullement affectées, comme la surface Σ et le contour σ, de l'arc de cercle Pp. Delà il suit que ces expressions pour $\mathfrak{S}$ et S ne sont point restreintes au cercle, desorte qu'elles auront lieu, l'une et l'autre, lorsque la Sphère, ou le cylindre, seront percés par un corps cylindriforme quelconque, insistant à une base curviligne quelconque exprimée par une équation arbitraire entre v et Φ. Les seuls termes d'intégration subiront quelque changement, en substituant une courbe à l'autre. Le problème suivant, fertile en conséquences remarquables, éclaircira ceci par l'exemple de la Sphère.

Problème 3.

§. 23. *Un demi-onglet de la Sphère, qui a pour base le secteur BCD, étant percé par un corps insistant perpendiculairement à une portion du secteur, comprise entre la partie CF du rayon et une ligne courbe quelconque CPF, trouver la surface et la solidité qui resteront à l'onglet entier après la perforation.* Tab. III. Fig. 5.

Solution.

Solution.

Soit le rayon du secteur $CB = CD = b$, l'angle au centre $BCD = \psi$, $CP = v$, l'angle $BCP = \Phi$, desorte que $PCp = \partial\Phi$, $pu = u\varsigma = \partial v$, $Pu = v\partial\Phi$. Transferons en idée les points C, P, π, ς, u, à la surface da la Sphère, par des perpendiculaires conçues érigées sur le plan du secteur, et nommons les points correspondans C′, P′, π' ς', u'; et il est clair que $C'P' = a$ arc. sin $\frac{v}{a}$, $u'\varsigma' = p'u' = \partial . C'P' = \frac{a\partial v}{\sqrt{aa - vv}}$ et $P'u' = v\partial\Phi$. De là résulte l'élément de la surface enlevée $P'\pi'\varsigma'u' = \frac{av\partial v\partial\Phi}{\sqrt{aa - vv}}$, comme §. 4. pour la perforation circulaire. Soit $\frac{1}{2}\mathfrak{S}'$ la surface enlevée, et $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$ celle qui est restée au demi-onglet, desorte que $\mathfrak{S} = 2\psi aa - \mathfrak{S}'$, et comme

$$\int \frac{v\partial v}{\sqrt{aa - vv}} = a - \sqrt{aa - vv} \text{ et}$$

$$\int \frac{v\partial v\partial\Phi}{\sqrt{aa - vv}} \begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = \psi\end{bmatrix} = \psi a - \int \partial\Phi \sqrt{aa - vv},$$

nous aurons $\mathfrak{S}' = 2\psi aa - 2a\int\partial\Phi\sqrt{aa - vv}$,
et partant la surface restante

$$\mathfrak{S} = 2a\int\partial\Phi\sqrt{aa - vv} \begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = \psi\end{bmatrix}.$$

Quant à la solidité, comme son élément est le prisme insistant à la basé $P\pi\varsigma u = v\partial v\partial\Phi$ et ayant pour hauteur la perpendiculaire $PZ = \sqrt{aa - vv}$, l'élément de la solidité enlevée sera $= v\partial v\partial\Phi\sqrt{aa - vv}$, comme §. 2. pour la perforation circulaire. Soit $\frac{S'}{2}$ la solidité enlevée et $\frac{S}{2}$ celle qui

qui est resté au demi-onglet, desorte que $S = \frac{2}{3}\psi a^3 - S'$,
et comme $\int v\partial v\sqrt{aa-vv} = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(aa-vv)^{\frac{3}{2}}$,
nous aurons $S' = \frac{2}{3}a^3\psi - \frac{2}{3}\int\partial\Phi(aa-vv)^{\frac{3}{2}}$,
et partant le résidu

$$S = \frac{2}{5}\int\partial\Phi(aa-vv)^{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix}\text{depuis } \Phi = 0\\ \text{jusqu'à } \Phi = \psi\end{bmatrix}.$$

Scholie.

§. 24. Au moyen de cette solution il ne sera pas difficile de percer la Sphère de tant qu'on voudra de manières qui toutes laissent une surface et une solidité géométriquement assignables. Il ne s'agit que de prendre pour v une fonction Φ telle que les deux intégrales rapportées pour $\mathfrak{C}$ et S deviennent algébriques, ce qu' on peut effectuer d'une infinité de manières. On pourra donc trouver une infinité de courbes à tracer dans le secteur BCD, dont les corps qui leur insistent, ont la propriété requise. Et comme on peut diviser la sphère en tant qu'on veut d'onglets, chaque courbe ainsi choisie donnera encore une infinité de solutions. Nous nous contenterons d'éclaircir ceci par l'exemple d'une seule courbe, qui fera le sujet du problème suivant:

Problème 4.

§. 25. *Ayant tracé dans le secteur* BCD *une courbe* CPB, *comprise sous l'équation* $v = a\cos n\Phi$, *trouver la surface et la solidité qui restent à l'onglet percé par un corps qui passe perpendiculairement par l'ouverture* CPBRC. Tab. III. Fig. 6.

Solution.

À cause de $v = a \cos n\Phi$ nous aurons donc

$\sqrt{aa - vv} = a \sin n\Phi$ et $(aa - vv)^{\frac{3}{2}} = v^3 \sin n\Phi^3$,

d'où nous tirons, à l'aide des formules du problème précédent, eu égard aux termes d'intégration

$$\mathfrak{S} = \frac{2aa(1 - \cos n\psi)}{n},$$

$$S = \frac{2a^3}{9n}(2 - \sin n\psi^2 \cos n\psi - 2\cos n\psi).$$

Soit aprésent l'angle au centre du secteur $\psi = \frac{\pi}{2n}$, pour avoir $\sin n\psi = 1$ et $\cos n\psi = 0$, et nous aurons la surface et la solidité de l'onglet percé géométriquement assignables, savoir $\mathfrak{S} = \frac{2aa}{n}$ et $S = \frac{4a^3}{9n}$, ou bien en nommant le diamètre de la sphère $= d$:

$$\mathfrak{S} = \frac{dd}{2n} \text{ et } S = \frac{d^3}{18n}.$$

Corollaire 1.

§. 26. À fin de connoître à peu près la figure de la ligne courbe comprise sous l'équation $v = a \cos n\Phi$, tracée dans le secteur BCD et servant de base au corps qui traverse l'onglet perpendiculairement au secteur, observons que si $\Phi = 0$, il y a $v = a$, et que si $\Phi = \psi = \frac{\pi}{2n}$, il y a $v = 0$. La courbe touche donc le rayon CD en C et passe par l'extrémité de l'autre rayon CB Un autre secteur BCE adjacent et égal au premier BCD contiendra une branche de courbe CRB semblable et égale à la premiere CPB, et ces deux branches ensemble renferment un espace curviligne CPBRC qui, pour tous les cas où $n > 1$ aura la forme d'une feuille, ayant pour longueur le rayon CB et une largeur d'autant plus grande que le nombre n sera petit.

Corol-

Corollaire 2.

§. 27. Une propriété remarquable de l'espace compris entre le rayon CB et la courbe CPB, c'est qu'il est exactement la moitié de la surface du secteur BCD. Car l'élément de cet espace étant $= PCp = \frac{1}{2} vv\partial\Phi = \frac{1}{2} aa\partial\Phi \cos n\Phi^2 = \frac{1}{4} aa\partial\Phi\,(1 + \cos 2n\Phi)$, la surface même sera $\frac{1}{4} aa\Phi + \frac{aa \sin 2n\Phi}{8n} = \frac{1}{4} \psi aa = \frac{1}{2}$ secteur BCD.

Corollaire 3.

§. 28. Une autre propriété remarquable de cette courbe c'est que la longueur de l'arc CPB est égale au quart du périmètre d'une ellipse dont les demi-axes sont a et $\frac{a}{n}$. Car comme l'élément $Pp = \sqrt{\partial v^2 + vv\partial\Phi^2}$, à cause de $v = a \cos n\Phi$ nous aurons: $a \sin n\Phi = \sqrt{aa - vv}$ et $\partial\Phi = \frac{-\partial v}{n\sqrt{aa + vv}}$, donc $Pp = \frac{\partial v \sqrt{nnaa - (nn-1)vv}}{nn(aa - vv)}$, et partant l'arc $CPB = \int \partial v \sqrt{\frac{nnaa - (nn-1)vv}{nn(aa-vv)}}$ $\left[\begin{matrix}\text{depuis } v = 0 \\ \text{jusqu'à } v = a\end{matrix}\right]$. Or l'ellipse en question aura $y = \frac{1}{n}\sqrt{aa - vv}$, $\partial y = -\frac{v\partial v}{n\sqrt{aa - vv}}$ et l'élément de l'arc $\partial s = \partial v \sqrt{\frac{nnaa - (nn-1)vv}{nn(aa-vv)}}$ $\left[\begin{matrix}\text{depuis } v = 0 \\ \text{jusqu'à } v = a\end{matrix}\right]$, donc le quart du paramètre $=$ arc. CPB.

Corollaire 4.

§. 29. Comme on peut diviser la sphère en tant qu'on veut d'onglets égaux et percer chaque onglet de la

manière indiquée dans le problème précédent, il est clair qu'on aura pour le problème de percer la sphère de façon que le résidu de sa surface et de sa solidité soit géométriquement assignable, autant de solutions différentes, qu'on voudra donner de valeurs diverses à la lettre *n*. Voici donc un théorème général comprenant celui de *Viviani* et celui de *Bossut*, qui n'en sont que des cas très particuliers:

Théorème 9.

§. 30. *Si l'on divise le grand cercle d'une sphère en tant qu'on veut de secteurs égaux, par exemple en m, et que dans chaque secteur* BCD *on trace une courbe* CPB *telle que* $CP = CB \cdot \cos \frac{m}{4} \cdot BCP$. *les corps cylindriformes qui insisteront de part et d'autre perpendiculairement aux* $\frac{m}{2}$ *surfaces curvilignes ainsi déterminées, retrancheront de la sphère une portion telle que le résidu de sa surface sera égal à deux fois le quarré du diamètre, et que le résidu de la solidité sera égal aux deux neuvièmes du cube du diamètre de la sphère.*

Démonstration.

La surface qui reste à chaque onglet étant $\mathfrak{S} = \frac{dd}{2n}$ et la solidité qui lui reste $S = \frac{d3}{18n}$ (§. 25.), parceque la sphère est composée de *m* onglets égaux, ce résidu de sa surface sera $m\mathfrak{S} = \frac{mdd}{2n}$, et le résidu de sa solidité sera $mS = \frac{md3}{18n}$. Mais le nombre des onglets $m = \frac{2\pi}{\psi} = 4n$ (à cause de $\psi = \frac{\pi}{2n}$, §. 25.) donc $m\mathfrak{S} = 2dd$ et $mS = \frac{2}{9}d^3$.

C. Q. F. D.

Corol-

Corollaire 1.

§. 31. Soit $n = 1$ et le nombre des onglets sera $m = 4$, celui des trous dont la sphère est percée sera $\frac{m}{2} = 2$; et comme $v = a \cos \Phi$, chaque courbe CPB tracée dans le secteur CDB sera un demicercle. C'est donc le cas du problème de *Viviani* et du Théorème de *Bossut*, chez nous §§. 2 et 4. Tab III. Fig. 1.

Corollaire 2.

§. 32. Soit $n = 2$, et le nombre des onglets ou secteurs BCD sera $m = 8$, celui des perforations $\frac{m}{2} = 4$, l'équation pour la courbe CPB sera $v = a \cos 2\Phi$ et la figure du grand cercle avec ses quatre ouvertures sera comme Fig. 8. Tab IV. Fig. 8.

Corollaire 3.

§. 33. Considérons un cas, où $n < 1$, parcequ'alors la courbe change de figure, la feuille se transformant en cœur émoussé (Fig. 7.). Soit par exemple $n = \frac{1}{2}$, desorte que le nombre des secteurs $m = 2$ et celui des perforations $\frac{m}{2} = 1$, et comme $v = a \cos \frac{1}{2}\Phi$.

Pour $\Phi = 30^\circ$ on aura $v = 0{,}966 \cdot a$
" " " " 60 " " " " " $0{,}896 \cdot a$
" " " " 90 " " " " " $0{,}707 \cdot a$
" " " " 120 " " " " " $0{,}500 \cdot a$
" " " " 150 " " " " " $0{,}259 \cdot a$

En faisant donc les angles $BCP = 30^\circ$, $BCP' = 60^\circ$, $BCP'' = 90^\circ$, &c. et donnant aux lignes CP, CP', CP'', &c. les valeurs correspondantes marquées, nous obtiendrons la courbe Tab. IV. Fig. 7.

courbe cordiforme tracée dans la figure septième; et la sphère ainsi percée d'un seul trou aura un résidu de surface égal au double du quarré du diamètre et un résidu de solidité égal aux deux neuvièmes du cube du diamètre.

Corollaire 4.

§. 34. Citons encore une propriété remarquable des perforations que nous venons d'examiner dans les deux corollaires précédens, et qui est une suite de la propriété démontrée au §. 28. Le demi contour CPB de chaque feuille de la figure 6. étant égal au quart du périmètre d'une ellipse dont les demi-axes sont a et $\frac{a}{2}$ (§. 28.), ce contour sera $\frac{\pi a\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 5}{8\cdot 8}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4 - \text{&c.}\right]$. Le demi-contour $CP'''P'B$ de la figure 7. étant égal au quart du périmètre d'une ellipse dont les demi-axes sont a et $2a$, ce contour sera $\frac{\pi a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 5}{8\cdot 8}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4 - \text{&c.}\right]$. Donc ce dernier contour est le double du premier. Généralement, si $n = k$ et $n = \frac{1}{k}$, k étant un nombre quelconque, les courbes qui en résultent auront leurs contours dans le rapport $1 : k$.

Corollaire 5.

Tab. III. Fig. 5. §. 36. Pour achever de faire connoître notre courbe CPF, cherchons encore le rayon osculateur au point P, qui, en tirant CT perpendiculaire sur la tangente PT, sera $R = \frac{v\partial v}{\partial . CT}$. Or $CT = \frac{CP\,pu}{Pp} = \frac{vv\partial\Phi}{\sqrt{\partial v^2 + vv\partial\Phi^2}}$, et ayant trouvé $\partial\Phi = n\frac{-\partial v}{\sqrt{aa - vv}}$ et $Pp = \frac{\partial v\sqrt{nnaa-(nn-1)vv}}{n\sqrt{aa-vv}}$ (§. 28.)

(§. 28.), nous aurons $CT = \frac{-vv}{\sqrt{nnaa-(nn-1)vv}}$, d'où Tab. III. Fig. 6.
nous tirons $\partial . CT = -\frac{v\partial v(2nnaa-(nn-1)vv}{(nnaa-(nn-1)vv)^{\frac{3}{2}}}$, donc
$R = -\frac{(nnaa-(nn-1)vv)^{\frac{3}{2}}}{2nnaa-(nn-1)vv}$. Si donc $n = 1$ (§. 31.), le rayon osculateur sera $R = \frac{1}{2}a$. Si $v = 0$, nous aurons, pour le point C, $R = \frac{1}{2}na$; et si $v = a$, nous aurons, pour le point B, $R = \frac{a}{nn+1}$.

DE

DE NUMERIS
qui semel vel pluries in summam duorum quadratorum resolvi possunt.

Auctore *C. F. KAUSLER.*

Conventui exhibita die 5. Nov. 1800.

§. 1.

Theoria factorum et numerorum primorum inter difficillimas Analyseos Diophanteae disquisitiones jure ponenda est. Quamvis enim unusquisque numerus, ut aggregatum plurium unitatum spectatus, sit quantitas omni modo determinata, prorsus tamen singulare est, solutionem problematis, an numerus quicunque datus factores habeat, nec ne, omnesque hujus rei perquisitiones ad principia Analyseos indeterminatae ducere. Hujus vero paradoxi ratio facile reddi potest, si perpendamus, hanc quaestionem plane esse indeterminatam. Dantur enim numeri qui multos, quin adeo infinitos habent factores, ad quos inveniendos praeter ipsum numerum plane nihil datum nobis est. Quemadmodum autem in geometria proprietates v. g. trianguli nondum ex eo patent, quod ista figura sit trilatera, ita etiam ad explorandos factores cujusdam numeri, numerus unitatum eum componens, minime sufficit, sed ejus in naturam penitius penetrare necesse est. Nulla vero numerorum proprietas ad hanc rem magis idonea mihi videtur, quam quae a Cel. *Fermatio* detecta, à Cel. *La Grange* autem universaliter demonstrata ita se habet: „Omnem numerum integrum non quadratum summam binorum, vel trium, vel „quatuor

„quatuor esse quadratorum.“ Decerpto enim numero in sua quadrata, via patet felicissima dijudicandi, an primus sit, nec ne, et quales habeat factores? Primus hanc viam nobis apperuit, atque ipse ingressus est b. *L. Eulerus*, qui et hanc Matheseos partem multis ac praeclaris inventis exornavit, et in egregia sua dissertatione: „De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum“ (vid. Nov. Comment. Petropolit. Tom IV.) inter alias insignes numerorum proprietates etiam hanc notatu dignissimam demonstravit: „Numeros formae $4m + 1$ esse primos, „si in duo tantum quadrata inter se prima discerpi pos„sint, ex factoribus autem esse compositos. si pluries in „summam duorum quadratorum eos resolvere liceat, vel „etiam si plane non sint summae duorum, sed trium vel qua„tuor quadratorum.“ His insuper numerorum proprietatibus superstruxit atque adornavit Vir celeberrimus egregiam factores ex quadratis deducendi methodum. Et sane haec methodus nihil desiderandum relinqueret, si quadrata, ex quibus datus componitur numerus, quovis casu facile assignari possent. Praeterea etiam methodus, qua ad invenienda quadrata utitur, indirecta videtur, cum tentamine potius quam formulis nitatur. Lubentissime quidem fateor, et meam ab Euleriana diversam methodum ejusmodi quadrata inveniendi, quam nonnullis abhinc annis cum Acad. Imp Petrop. communicavi et quae in Tom. IX Nov. Actorum inserta legitur, eodem laborare vitio. Quare neque incongruum, neque lectoribus injucundum fore existimo, si ad perficiendam hanc methodum novum quoddam additamentum et nonnullas observationes circa numeros, qui sunt aggregata duorum quadratorum, hic subjungam. Multa

enim in hac materia, a Mathematicis vix delibata, adhuc superesse quae ulteriorem investigationem admittant, quis est qui in dubium vocare audeat?

I. Problema.

§. 2. Dato numero integro A, quem supponimus esse summam binorum quadratorum inter se primorum a^2 et b^2, quorum utrumque cognitum, explorare, an dentur adhuc alia quadrata x^2 et y^2, in numeris integris, quorum summa pariter sit A.

Solutio.

Statuamus $x = mX + a$, et $y = nX - b$, ubi m, n, et X quantitates adhuc indeterminatas denotant. His positis erit: $x^2 = m^2X^2 + 2amX + a^2$, et

$$y^2 = n^2X^2 + 2bnX + b^2,$$

ergo $x^2 + y^2 = (m^2 + n^2)X^2 + 2(am - bn)X + a^2 + b^2$. Jam, cum $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ esse debeat, habebimus aequationem:

$(m^2 + n^2)X^2 + 2(am - bn)X = 0$, ex qua sequitur:

$X = 2\left(\frac{nb - ma}{m^2 + n^2}\right)$, $x = 2m\left(\frac{nb - ma}{m^2 + n^2}\right) + a$, et

$y = 2n\left(\frac{nb - ma}{m^2 + n^2}\right) - b$.

Hi ergo valores numeri integri esse debent. Eo igitur quaestio deducta jam est, ut datis a et b inveniantur ejusmodi valores numerorum m et n, ut expressio $\frac{nb - ma}{m^2 + n^2}$ evadat numerus integer. Quem in finem ponamus $\frac{nb - ma}{m^2 + n^2} = \alpha$, tunc b erit $= \frac{\alpha m + a}{n} n + \alpha n$. Cum autem m et n spectentur tanquam numeri inter se primi, quantitatem $\alpha m + a$ per n divisibilem esse oportet. Quare si $\frac{\alpha m + a}{n}$ ponatur $= \beta$, erit

$$b = \alpha n + \beta m, \text{ et}$$
$$a = \beta n - \alpha m,$$

hinc

hinc numeri integri et determinati α, β, m, n, ita definiendi sunt, ut duabus hisce aequationibus satisfiat. Sed ex principiis Analyseos indeterminatae constat, aequationem formae $C = Ax - By$ resolvi posse in numeris integris, sumendo $x = pC + \mu B$, et $y = qC + \mu A$, ubi $\frac{p}{q}$ est terminus penultimus seriei fractionum continuarum versus $\frac{B}{A}$ convergentium, sive fractio numero $\frac{B}{A}$ proxima, (atque igitur $pA - qB = \pm 1$), μ vero quilibet numerus integer positivus vel negativus. Quodsi adplicemus hoc ad aequationem $a = \beta n - \alpha m$, ubi $a = C$, $\beta = A$, $\alpha = B$, $n = x$, et $m = y$, valores x et y abeunt in $n = pa + \mu\alpha$, et $m = qa + \mu\beta$, qui substituti in aequatione $b = \alpha n + \beta m$, illam in:

$b = (\alpha p + \beta q)a + \mu(\alpha^2 + \beta^2)$, sive in

$b = (\alpha p + \beta q)a \pm \mu(\alpha^2 + \beta^2)$ transmutant. In hac igitur α, β, et μ sunt numeri quicunque, dummodo summa $\alpha^2 + \beta^2$ et μ sint primi ad a, $\frac{p}{q}$ vero est fractio continenter proxima fractioni $\frac{\alpha}{\beta}$, cujus numerator et denominator ad minimos terminos reducti supponuntur.

Concludimus itaque quaestionem propositam solvi posse, si datis a et b, ejusmodi valores quantitatum α, β, μ, p, q inveniri possint, ut expressio: $(\alpha p + \beta q)a \pm \mu(\alpha^2 + \beta^2)$ evadat $= b$; impossibilem vero esse, si nulli valores harum quantitatum extant huic conditioni satisfacientes. Sumantur ergo pro α^2 et β^2 omnia quadrata inter se prima, et quorum summa pariter est numerus primus ad a, tribuantur succesive quantitati μ valores numerorum in naturali serie ab unitate progredientium et primorum ad a, ac quaeratur ex $\frac{\alpha}{\beta}$ fractio huic proxima $\frac{p}{q}$, tunc pervenietur necessario vel ad terminum b, vel ad numerum $> b$. Priori

casu ab inventis valoribus α, β, p, q, μ ad expressiones m, n, x, y retrogredi possumus, posteriori autem quaestio impossibilis est. Hanc vero operationem certos intra fines necessario includi debere, ex natura formulae

$$b = (\alpha p + \beta q)a + \mu(a^2 + \beta^2)$$ per se patet.

Illustremus hanc solutionem nonnullis exemplis.

I. Exemplum.

§. 3. Numerus 370 est summa quadratorum 19^2 et 3^2. Quaeritur, an hic numerus in duo alia quadrata resolvi queat?

Cum $a = 3$, $b = 19$, aequatio praecedens evadet: $19 = 3(\alpha p + \beta q) + \mu(\alpha^2 + \beta^2)$. Sumamus signum superius. Est vero minima summa binorum quadratorum inter se primorum numerus 5, et oritur ex suppositione $\alpha = 1$, et $\beta = 2$; hoc autem casu $\frac{p}{q} = \frac{1}{1}$, ergo $p = 1$, et $q = 1$. Ergo $19 = 9 + 5\mu$: unde $\mu = 2$. Cum igitur hic numerus inventus sit integer, hi valores aequationi satisfaciunt et proinde habebimus

$$m = q\alpha + \mu\beta = 7.$$
$$n = p\alpha + \mu\alpha = 5.$$

Ergo $x = 2m\alpha + a = 17$,

et $y = 2n\alpha - b = -9$.

Ideoque 370 non solum $= 19^2 + 3^2$, sed et $17^2 + 9^2$.

Si vero signum inferius adhibeatur, sumendo pro μ valores negativos, tunc aequatio solvenda erit $19 = 3(\alpha p + \beta q) - \mu(\alpha^2 + \beta^2)$, quae positis $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p = 1$, $q = 1$, abit in $19 = 9 - 5\mu$, ex qua deducitur $-\mu = +2$, haec autem suppositio eosdem valores ac praecedens pro x et y praebet, qui etiam iidem inveniuntur, si $\alpha = 2$, $\beta = 1$, proinde $\frac{p}{q} = \frac{3}{1}$ ponatur.

II. Ex-

II. Exemplum.

§. 4. Numerus $689 = 20^2 + 17^2$. Quaeritur, an dentur bina alia quadrata, quorum summa huic numero aequalis sit?

Cum $a = 17$, et $b = 20$, aequatio examinanda erit $20 = (\alpha p + \beta q)\, 17 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)$, in qua perspicuum est signum superius assumi non posse, quoniam minimi valores ipsius α, β et μ numerum $(\alpha p + \beta q)\, 17 + \mu(\alpha^2 + \beta)$ majorem quam 20 producunt. Sumamus itaque signum inferius, et statuamus:

1°.) $\alpha = 1$, $\beta = 2$, unde $p = 1$, $q = 1$; proinde $20 = 51 - 5\mu$, et $\mu = \frac{31}{5}$. Cum autem hic valor it numerus fractus, suppositio haec fieri nequit. Idem continget, si ponamus:

2°.) $\alpha = 2$; $\beta = 1$, proinde $\frac{p}{q} = \frac{3}{1}$; vel

3°.) $\alpha = 1$, $\beta = 3$, ergo $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$, vel

4°.) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\frac{p}{q} = \frac{4}{1}$. Suppositio autem

5°.) $\alpha = 2$; $\beta = 3$, ex qua sequitur $\frac{p}{q} = \frac{1}{1}$, dat $\mu = 5$. Et cum hic numerus sit integer, valores hi quaestionem solvunt, eritque:

$m = q\alpha - \mu\beta = 2$.

$n = p\alpha - \mu\alpha = 7$. Ergo

$x = 2m\alpha + a = 25$, et

$y = 2n\alpha - b = 8$.

Unde concludimus 689 esse non solum $= 20^2 + 17^2$, sed et $= 25^2 + 8^2$.

§. 5.

§. 5. Fateor equidem hanc methodum, si numerus explorandus valde fuerit magnus, laboriosam esse. Nihilominus tamen, quum ex ipsa rei natura deducta sit, attentione geometrarum non indignam esse arbitror. Praeterea, mutato problemate, formulae praecedentes egregie nobis inserviunt. Quodsi enim quaeratur quinam sint numeri, qui pluries in summam duorum quadratorum resolvi queant, aequationes modo inventae ad solvendam hanc quaestionem sufficiunt. Posita nempe $\frac{\alpha}{\beta}$ fractione quacunque ad minimos terminos reducta, et $\frac{p}{q}$ fractione huic continenter proxima, existentibus μ et a numeris quibuscunque pro lubitu assumendis, invenietur $b = (\alpha p + \beta q)a + \mu(\alpha^2 + \beta^2)$, et $b^2 + a^2$ erit numerus pluries in summam duorum quadratorum solubilis. Haec quadrata, praeter b^2 et a^2 sunt x^2 et y^2, vel $(-m\alpha + a)^2$ et $(2n\alpha - b)^2$, ubi $m = qa + \mu\beta$, et $n = pa \pm \mu\alpha$ assumi debent. Et cum α et β sint numeri indeterminati, quos in infinitum variare licet, perspicuum est, has formulas omnes involvere numeros, qui pluries in summam duorum quadratorum discerpi possunt. — En aliquot exempla.

§. 6. Sit $\alpha = 58$, et $\beta = 7$. Est vero $\frac{25}{3}$ fractio continenter proxima fractioni $\frac{58}{7}$, ergo $p = 25$, et $q = 3$. In hoc casu aequatio nostra evadet $b = 141a + 3413\mu$, ubi pro a et μ omnes valores integros assumere licet, et numeri $b^2 + a^2$ semper duplici modo in summam duorum quadratorum discerpi poterunt. E. g. si statuatur $a = 3$, et $\mu = 1$, b erit vel $= 7820$, vel $= 1000$. Ponamus $b = 1000$, ideoque numerus $b^2 + a^2 = 1000^2 + 3^2 = 1000009$ duplici modo est summa binorum quadratorum: habebimus enim ex supradictis $m = qa + \mu\beta$, et $n = pa \pm \mu\alpha$, ergo si et hîc signum inferius sumatur, et litteris α, β, p, q, μ valores prae-

praecedentes tribuantur, erit $m = 2$, et $n = 17$. ex quibus $x = 2m\alpha + a = 4.58 + 3 = 235$, et $y = 2n\alpha - b = 34.58 - 1000 = 972$ sequitur. Ergo numerus $1000009 = 1000^2 + 3^2$ et $= 235^2 + 982^2$.

Ponamus nunc $a = 1$, et $\mu = 1$, tunc b erit $= 1471 \pm 3413$, vel si signo superiori utamur, $b = 4884$. et $b^2 + a^2 = 23853457$. Hic igitur numerus in duo alia quadrata pariter est resolubilis, quae per formulas modo explicatas inveniuntur esse 1161^2 et 4744^2. Cum igitur numeri 1000009 et 23853457, qui sunt formae $4g + 1$, pluries in summam duorum quadratorum resolvi possint, ex theoremate Euleriano VII. patet, eos non esse primos, sed ex factoribus compositos, qui per formulas Coroll. 1. et 2 illius propositionis facillime inveniuntur.

Transeo nunc ad methodum novam ac generalem, numeros formae $4m + 1$ in summam duorum quadratorum resolvendi, quae non solum Euleriana, sed et illa, de qua locutus sum §. 1. multo praestantior mihi videtur, etiamsi iisdem principiis quam haec innitatur. Operationes quas praescribit, faciles ac parum molestae ad minimum numerum reductae sunt. In ea iisdem numeris pronicis utor, qui et citati tractatus faciunt Latin, et quorum magna utilitas sequentibus demum confirmabitur solutionibus. Hi autem numeri nihil sunt aliud, quam productum duorum numerorum integrorum in serie naturali proxime sequentium, quorum minor radix producti dicitur. Cum eorum expressio generalis sit $m(m + 1)$, patet, eos non solum esse pares, sed et omnes in 0, 2, vel 6 desinere. Tabula in fine hujus dissertationis subjuncta a 2 usque ad 100100 eiusmodi numeros et quidem prima columna eorundem radices, sive

sive numeros naturales, secunda numeros pronicos, tertia horum semisses, quarta et quinta tertiae columnae semisses pares et impares continet. Quantus autem sit usus istius tabulae in explorandis numerorum factoribus, sequentibus exemplis abunde patebit, ad quae statim me converto, quia hoc modo applicationem principiorum a nobis tradendorum multo magis perspici posse quam ex ratiociniis generalioribus, persuasum me habeo. Denique exempla nostra fere eadem esse observo quae in tractatu Euleriano soluta inveniuntur, quo ambae methodi facilius inter se comparari possint.

I. Problema.

§. 8. Decomponere numerum 32129 in summam duorum quadratorum?

Solutio.

Si datus numerus fuerit impar, summa binorum quadratorum, alterum par, alterum impar esse debebit. Sit igitur $32129 = p^2 + q^2$, ac ponatur $p = P + 1$, et $q = 2Q$, tunc 8032 erit $= P(P+1) + Q^2$. unde perspicuum est Q esse numerum parem. Posito igitur $Q = 2T$, aequatio nostra evadet;

$$4(2008 - T^2) = P(P+1).$$

Eo igitur perduximus quaestionem, ut quaerendi sint ejusmodi valores ipsius T, qui reddant productum $4(2008 - T^2)$ aequale numero pronico $P(P+1)$: ubi duo casus perpendendi sunt. Quodsi enim pro T sumantur valores pares, differentia $2008 - T^2$ erit par, sin autem T fuerit impar, haec differentia necessario impariesse debet. Priori casu valores $2008 - T^2$ in columna quinta, posteriori autem in quarta nostrae tabulae quaerendi sunt. Incipiamus a primo casu.

In

In hoc igitur tot aequationes formae:

$$2008 - T^2 = 14.$$
$$2008 - T^2 = 18.$$
$$2008 - T^2 = 60.$$
$$\text{etc.}$$

formandae sunt, donec perveniatur ad numerum columnae quintae, qui vel $= 2008$, vel immediate minor sit, scilicet donec fuerit:

$$2008 - T^2 = 1958.$$

Ex hisce aequationibus sequitur fore:

$$2008 - 14 = T^2$$
$$2008 - 18 = T^2$$
$$2008 - 60 = T^2$$
$$\text{etc.}$$
$$2008 - 1958 = T^2.$$

Cum vero omnes numeri quintae columnae in 0, 4, vel 8 desinant, nullumque quadratum in cifram 8, vel unicum tantum 0 desinere possit, inutile erit subtrahere a 2008 eos numeros hujus columnae, qui vel in 0, vel in 8, quem non praecedit zero, desinunt. Rejectis igitur hisce numeris, sequentes tantum habebimus aequationes:

$$\left.\begin{array}{l} 2008 - 14 \\ 2008 - 264 \\ 2008 - 564 \\ 2008 - 1008 \\ 2008 - 1314 \\ 2008 - 1914 \end{array}\right\} = T.$$

quae commodissime ita repraesentare licet:

2008	Numeri subtrahendi.	Residuum vel T^2
	14 . . .	1994
	264 . . .	1644
	564 . . .	1444 = 38.
	1008 . . .	1000
	1314 . . .	694
	1914 . . .	94

Cum inter haec residua unicum reperiatur quadratum, scilicet 1444, cujus radix = 38, quaestio proposita per columnam quintam unico tantum modo resolvi poterit, eritque retrogrediendo, $T = 38$, $P = 47$ (quippe qui numerus secundae columnae valori 564, a quo 1444 oritur, respondet). Ergo $Q = 2T = 76$ $g = 2Q = 152$, et $p = 2P + 1 = 95$: ideoque numerus propositus $32129 = 95^2 + 152^2 = 19^2(25 + 64) = 19^2 \cdot 89$.

Superest ut simili modo perscrutemur secundum casum, quo T numerus impar supponitur. Hoc casu differentiae $2008 - T^2$ impares, ideoque numeris quartae columnae aequales sunt, unde sequentes oriuntur aequationes:

$$\left.\begin{array}{l} 2008 - 3 \\ 2008 - 5 \\ 2008 - 33 \\ \quad \&c. \\ 2008 - 1785 \end{array}\right\} = T^2$$

Cum vero omnes numeri quartae columnae in 3, 5, vel 9 desinant, nullumque quadratum in desinere possit, omnes hujus columnae numeri, qui in 5 desinunt, rejici debent, quia

quia eorum et numeri 2008 residuum nunquam fieri potest quadratum. Insuper omnes in 3 desinentes numeri, qui non simul in 83 desinunt, rejiciendi sunt, cum quadrata in 5 desinentia simul in 25 desinunt. Habebimus igitur tabulam sequentem:

2008	Numeri subtrahendi	Residua vel T
	39 . . .	1969
	189 . . .	1819
	689 . . .	1319
	1139 . . .	869

Cum autem nullum horum residuorum quadratum sit, quaestio proposita unicam tantum admittit solutionem, quam priori casu dedimus Solutio igitur nostra hujus problematis per 10 tantum differentias absolvitur, quum methodus Euleriana 19 operationes requirat.

Problema II.

§. 9. Resolvere numerum 82421 in summam duorum quadratorum.

Solutio.

Sit $82421 = p^2 + q^2$, et p et q alter par, alter impar esse debebunt. Positis itaque $p = 2P + 1$, et $q = 2Q$, aequatio nostra evadit:

$$20605 - Q^2 = P(P + 1).$$

Cum vero 20605 sit numerus impar, Q imparem esse necesse est. Sumamus igitur $Q = 2T + 1$, unde $4(5151 - T\,T + 1) = P.(P + 1)$. Eo igitur pervenimus, ut inveniendi sint ejusmodi valores ipsius T, ut $4(5151 - T(T + 1)$ sit nume-

rus pronicus. Sed $5151 - T(T+1)$ est numerus impar. Haec ergo differentia aequanda est numeris quartae columnae. Cum autem hi omnes in 3, 5 vel 0 desinant, numeri pronici vero in 0, 2, vel 6, perspicuum est, e numero aequationum:

$$\left.\begin{array}{l} 5151 - 3 \\ 5151 - 5 \\ 5151 - 33 \\ 5151 - 39 \\ \quad \text{etc.} \\ 5151 - 4935 \end{array}\right\} = T(T+1).$$

eas abscindi debere, in quibus hi numeri 3, 5, 33 etc. quartae columnae desinunt in 3: quia differentiae $5151 - 3$, $5151 - 33$ etc. desinentes in 5, numeris pronicis nunquam aequales esse possunt. His igitur neglectis, solutio propositae quaestionis per sequentem tabulam expedite absolvi potest

5151	Numeri subtrahendi.	Residua vel $T(T+1)$.	5151	Numeri subtrahendi.	Residua vel $T(T+1)$.
	5 . .	5146		1425	3726
	39 . .	5112 = 71. 72.		1785	3366
	95 . .	5056		2139	3012
	105 . .	5046		2475	2676
	189 . .	4962		2525	2626
	315 . .	4836		2889	2262
	495 . .	4656		3335 . . .	1816
	689 . .	4462		3875	1276
	885 . .	4266		4389	752
	915 . .	4236		4865	286
	1139 . .	4012		4935	216

Cum

Cum hic unicus occurrat numerus pronicus, scilicet $5112 = 71 \cdot 72$, quaestio nostra unicam tantum admittit solutionem. Habebimus nimirum $T = 71$, $P = 12$, (hic enim valor respondet numero 39, a quo differentia 5112 orta est) ergo retrogrediendo $Q = 2T + 1 = 143$, $q = 2Q = 286$, $p = 2P + 1 = 25$. Proinde $82121 = 25^2 + 286^2$. Absolvimus solutionem ope 22 differentiarum, cum *Eulero* ad eandem 56 operationibus suae methodi opus fuerit.

Problema III.

§. 10. Numerus in bina quadrata resolvendus, sit 262657.

Solutio.

Ponamus $262657 = p^2 + q^2$, $p = 2P + 1$, et $q = 2Q$, ergo $65664 - Q^2 = P(P + 1)$, et Q par esse debebit. Fiat $Q = 2T$, et aequatio nostra evadet:

$$4(16416 - T^2) = P(P + 1).$$

Differentia autem $16416 - T^2$ par vel impar erit, prout numerus T par vel impar assumitur. Si T fuerit numerus par, differentia haec aequanda est numeris quintae columnae, qui omnes in 0, 4 vel 8 desinunt. Cum vero nullus numerus quadratus T^2 in 2 vel 8 disinere possit, omnes numeri istius columnae rejiciendi sunt, qui desinunt in 4 vel 8, quia evidens est nullos numeros formae: $16416 - \ldots\ldots 4$, vel $16416 - \ldots\ldots 8$ quadrata fieri posse. Insuper rejiciendi sunt omnes numeri subtrahendi desinentes in , ubi praecedens cifra est impar. His igitur numeris neglectis, sequentes tantum casus examinandi supersunt.

16416

16416	Numeri subtrahendi	Residua vel T^2
	60	16356
	1040	15376 $= 124^2$
	1580	14836
	1620	14796
	2280	14135
	5220	11196
	6360	10056
	6440	9976
	7700	9716
	14340	2076
	14460	1956
	16320.	96

Unicum hic invenitur quadratum, scilicet $15376 = 124^2$. Ergo $T = 124$, $P = 64$, $Q = 248$, $q = 496$, $p = 129$ et $262657 = 129^2 + 464^2$.

Si T supponatur impar, differentia $16416 - T^2$ aequanda est numeris quartae columnae in 3, 5 vel 9 desinentibus. Cum vero nullum quadratum in 3 vel 7 desinat, rejiciendi sunt omnes hujus columnae numeri qui vel in 3 vel 9 desinunt. Porro rejiciendi etiam sunt ii numeri desinentes in 5, quorum praecedens cifra est par. Reliqui in 5 desinentes, cum suis residuis in sequenti tabula continentur:

1041	Residua vel T	Numeri subtrahendi
	95	16321
	315	16101
	495	15921
	915	15501
	2475	13941
	3335	13081
	3875	12541
	4935	11481
	8035	8381
	9555	6861
	12155	4261

Inter haec residua nullum exstat quadratum: concludimus itaque numerum propositum in duo tantum quadrata resolvi posse. Numerus differentiarum in hac solutione est 33; numerus operationum, quibus *Eulerus* idem problema solvit, 64.

Problema IV.

§. 11. Resolvere numerum 1000009 in bina quadrata?

Solutio.

Sit $1000009 = p^2 + q^2$, $p = 2P + 1$, et $q = 2Q$ Ergo $250002 - Q^2 = P(P+1)$, et numerum Q parem esse opportere perspicuum est. Quare si Q ponatur $= 2T$, aequatio resolvenda erit:

$$2(125001 - 2T^2) = P(P+1).$$

Productum autem $2(125001 - 2T^2)$ erit numerus primus, si factor impar $125001 - 2T^2$ numeris imparibus tertiae columnae aequetur: Hi vero omnes numeri in 1, 3 vel 7 desinunt,

sinunt, et illi formae $2T^2$ in 00, 50, 2 vel 8. Rejiciendi ergo sunt omnes numeri hujus columnae non in 01, 51, vel 3 desinentes, nec non illi qui vel in $p53$, vel $p51$ desinunt, ubi p est numerus par, quia quadrata neque in 74, neque in 75 desinere posse dudum cognitum est. Unde sequens tabula, 53 differentias cum earundem semisse continens oritur:

125001.	Numeri subtrahendi.	Semisses Resid. vel T^2.	125001.	Numeri subtrahendi.	Semisses Resid. vel T^2.
	1	$62500 = 250^2$.		37401	43800
	3	62499		38503	43249
	153	62424		39903	42549
	351	62325		44501	40250
	703	62149		45753	39624
	903	62049		50403	37299
	1953	61524		52003	36499
	2701	65110		53301	35850
	3003	60999		56953	34024
	3403	60799		63903	30549
	4753	60124		65703	29649
	5151	59925		69751	27625
	6903	$59049 = 243^2$		73153	25924
	7503	58749		79003	22999
	8001	58500		79401	22800
	10153	57524		80601	22200
	12403	56299		81003	21999
	13203	55899		87153	18924
	15753	54624		90951	17025
	19503	52749		95703	14649
	19701	52650		97903	13549
	20301	52350		106953	9024
	20503	52249		112101	6450
	24753	50124		114003	5499
	28203	48399		116403	4299
	29403	47799		123753	624
	33153	45924			

Duce

Duae hic contingunt solutiones: prima ubi $T = 250$, $P = 1$, $Q = 500$, $q = 1000$, $p = 3$; et secunda ubi $T = 243$, $P = 117$, $Q = 486$, $q = 972$ et $p = 225$. Hi valores sunt iidem, quos Eulerus per 83 operationes, ope suae methodi invenit. Solutio nostra hujus exempli paulo longior est, quia differentiarum semisses sumendae sunt.

Problema V.

§. 12. Resolvere numerum 1000001 in summam duorum quadratorum.

Solutio.

Si $1000001 = p^2 + q^2$, $p = 2P + 1$, $q = 2Q$ et $Q = 2T$ ponatur, pervenietur ad aequationem $4(62500 - T^2) = P(P+1)$, quae duos admittit casus, prout T par vel impar sumatur. Si T fuerit numerus par, differentia $62500 - T^2$ aequanda est numeris quintae columnae, qui in 0, 4 vel 8 desinunt, cumque eorum ac numeri 62500 differentia quadratum esse debeat, rejiciendi sunt omnes, qui non in 00 vel 4 desinunt. Reliqui sequentem nobis tabulam suppeditant:

62500	Numeri subtrahendi.	Residua vel T^2.	62500.	Numeri subtrahendi.	Residua vel T^2.
	0 . . .	$62500 = 250^2$.		18564 . . .	43936
	14 . . .	62486		20664 . . .	41836
	264 . . .	62236		24414 . . .	38086
	564 . . .	61936		26814 . . .	35686
	1314 . . .	61186		31064 . . .	31436
	1914 . . .	60586		33764 . . .	28736
	3164 . . .	59336		38514 . . .	23986
	4064 . . .	58436		39900 . . .	22600
	5814 . . .	56686		40100 . . .	22400
	7014 . . .	55486		41514 . . .	20986
	7700 . . .	54800		46764 . . .	15736
	9264 . . .	53236		50064 . . .	12436
	10764 . . .	51736		55814 . . .	6686
	13514 . . .	48986		59414 . . .	3086

Ubi observo columnas contrahi adhuc posse, abscindendo numeros in 14 desinentes, cum nullum quadratum in 86 desinere possit. Ceterum inter residua hujus casus unicum extat quadratum, scilicet $62500 = 250^2$. Examinandus igitur superest secundus casus, quo T numerus impar supponitur. Ergo factor $62500 - T^2$ numeris columnae quartae aequandus erit; ubi notandum est non solum omnes in 3 desinentes, sed et eos qui in 5 desinunt, nec simul in 75, rejiciendos esse. Unde oritur sequens tabula:

62500	Numeri subtrahendi	Residua vel T^2	62500	Numeri subtrahendi.	Residua vel T^2
	39 . . .	62461		17889 . . .	54611
	189 . . .	62311		18975 . . .	43525
	689 . . .	61811		21389 . . .	41111
	1139 . . .	61361		23639 . . .	38861
	2139 . . .	60361		27639 . . .	34861
	2475 . . .	$60025 = 245^2$		30189 . . .	32311
	2889 . . .	59611		34689 . . .	27811
	5439 . . .	57061		37539 . . .	24961
	7439 . . .	55061		42939 . . .	19961
	8789 . . .	53711		45689 . . .	16811
	11289 . . .	51211		51179 . . .	11311
	12939 . . .	49561		54639 . . .	7861
	15939 . . .	46561			

Sed 6025 est quadratum, cujus radix 245; invenimus itaque duas solutiones sequentes:

1). $T = 250$, $P = 0$, $Q = 500$, $q = 1000$, $p = 1$
et $1000001 = 1000^2 + 1^2$.

2). $T = 245$, $P = 99$, $Q = 490$, $q = 980$, $p = 199$,
et $1000001 = 199^2 + 980^2$.

Cum jam numeri 199 et 980 sint inter se primi, et 1000001 duplici modo sit summa binorum quadratorum, ex theore-

mate

mate Euleriano patet, hunc numerum non esse primum, sed ex factoribus compositum, qui per propositionem VII. Corol. 1. 2. 3. inveniuntur esse 101 et 9901.

Columnae secundi casus hujus solutionis contrahi possunt rejiciendo omnes numeros subtrahendos in 89 desinentes, quia constat nullum quadratum in 11 desinere posse, sed, si desinit in 1, cifra praecedens erit 0, vel 2, vel 4, vel 6, vel 8, hoc modo solutio hujus quaestionis ope 30 differentiarum absolvi poterit.

Problema VI.

§. 13. Explorare, utrum numerus 10001 factores habeat, nec ne?

Solutio.

Cum hic numerus sit formae $4m + 1$, quaestio eo redit, ut examinetur, num ille semel vel pluries in summam duorum quadratorum resolvi possit?

Ponamus igitur $10001 = p^2 + q^2$, $p = 2P + 1$, $q = 2Q$, tunc $2500 - Q^2$ erit $= P(P + 1)$, cumque Q numerum parem esse oporteat, sit $Q = 2T$, unde sequitur esse:

$$4(645 - T^2) = P(P + 1).$$

Est autem T vel impar, vel par. Priori casu differentia $625 - T^2$ aequanda est numeris quintae columnae, in 0, 4 vel 8 desinentibus. Rejicientur ergo illi qui non in 00, vel 4, quam cifram praecedit numerus par, desinunt, et formetur ex reliquis sequens tabula:

625	Numeri subtrahendi.	Residua vel T^2.
	00 . . .	$625 = 25^2$
	264	$361 = 19^2$
	564 . . .	61

Duo occurrunt hic quadrata $625 = 25^2$ et $361 = 19^2$, habebimus igitur $T = 25$, $P = 0$, $Q = 50$, $q = 100$, $p = 1$, et $10001 = 100^2 + 1^2$, vel $T = 19$, $P = 32$, $Q = 38$, $q = 76$, $p = 65$ et $10001 = 65^2 + 76^2$.
Si vero T supponitur esse numerus impar, factor $625 - T^2$ aequandus est numeris quartae columnae in 3, 5, 9 desinentibus. Rejectis igitur omnibus qui non in 25, vel 9 desinunt, habebimus:

625	Numeri subtrahendi	Residua vel T^2.
	39	586
	189	436

ubi nullum invenitur quadratum. Numerus 10001 itaque duplici modo in summam duorum quadratorum resolubilis est. Scilicet $10001 = 100^2 + 1^2$, et $= 65^2 + 16^2$; cumque 100 et 1, itemque 65 et 16 sint numeri inter se primi, propositus numerus non est primus, sed ex factoribus compositus qui per propositionem VII. inveniuntur esse 73 et 137. Cel. *Lambert* in opusculis suis (Beiträge zum Gebrauch der Mathematik) Tom. II. pag. 38, 39. solvit hanc quaestionem 73 positionibus ope suae methodi, cum nostra 5 tantum differentias requirat.

§. 14. Plura exempla hujus methodi addere superfluum mihi videtur, cum, quae hactenus dicta sunt, ejus adplicationem ac fertilitatem satis dilucidaverint. Ope principiorum a nobis traditorum via, uti spero, nunc brevissima ac facillima patet, dignoscendi, utrum numeri formae $4m + 1$ primi sint, vel quales habeant factores? et ni fallor, nihil haec quaestio desiderandum relinquit. Quare nec injucundum fore existimo, si sequentem tabulam hic adjungam, cujus usum praecedentes solutiones satis declarant.

Tabula

Tabula numerorum pronicorum a 2 usque ad 1001000, eorumque semisses &c.

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
1	2	1	. .	. .	33	1122	561	. .	. .
2	6	3	. .	. .	34	1190	595	. .	. .
3	12	6	3	. .	35	1260	630	315	. .
4	20	10	5	. .	36	1332	666	333	. .
5	30	15	. .	. .	37	1406	703	. .	. .
6	42	21	. .	. .	38	1482	741	. .	. .
7	56	28	. .	14	39	1560	780	. .	390
8	72	36	. .	18	40	1670	820	. .	410
9	90	45	. .	. .	41	1722	861	. .	. .
10	110	55	. .	. .	42	1806	903	. .	. .
11	132	66	33	. .	43	1892	946	473	. .
12	156	78	39	. .	44	1980	990	495	. .
13	182	91	. .	. .	45	2070	1035	. .	. .
14	210	105	. .	. .	46	2162	1081	. .	. .
15	240	120	. .	60	47	2256	1128	. .	564
16	272	136	. .	68	48	2352	1176	. .	588
17	306	153	. .	. .	49	2450	1225	. .	. .
18	342	171	. .	. .	50	2550	1275	. .	. .
19	380	190	95	. .	51	2652	1326	663	. .
20	420	210	105	. .	52	2756	1378	689	. .
21	462	231	. .	. .	53	2862	1431	. .	. .
22	506	253	. .	. .	54	2970	1485	. .	. .
23	552	276	. .	138	55	3080	1540	. .	770
24	600	300	. .	150	56	3162	1596	. .	798
25	650	325	. .	. .	57	3306	1653	. .	. .
26	702	351	. .	. .	58	3422	1711	. .	. .
27	756	378	189	. .	59	3540	1770	885	. .
28	812	406	203	. .	60	3660	1830	915	. .
29	870	435	. .	. .	61	3782	1891	. .	. .
30	930	465	. .	. .	62	3906	1953	. .	. .
31	992	496	. .	248	63	4032	2016	. .	1008
32	1056	528	. .	264	64	4160	2080	. .	1040

Radix

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
65	4290	2145	. .	. .	100	10100	5050	2525	. .
66	4422	2211	. .	. .	101	10302	5151	. .	. .
67	4556	2278	1139	. .	102	10506	5253	. .	. .
68	4692	2346	1173	. .	103	10712	5356	. .	2678
69	4830	2415	. .	. .	104	10920	5460	. .	2730
70	4970	2485	. .	. .	105	11130	5565	. .	. .
71	5112	2556	. .	1278	106	11342	5671	. .	. .
72	5256	2628	. .	1314	107	11556	5778	2889	. .
73	5402	2701	. .	. .	108	11772	5886	2943	. .
74	5550	2775	. .	. .	109	11990	5995	. .	. .
75	5700	2850	1425	. .	110	12210	6105	. .	. .
76	5852	2926	1463	. .	111	12432	6216	. .	3108
77	6006	3003	. .	. .	112	12656	6328	. .	3164
78	6162	3081	. .	. .	113	12882	6441	. .	. .
79	6320	3160	. .	1580	114	13110	6555	. .	. .
80	6480	3240	. .	1620	115	13340	6670	3335	. .
81	6642	3321	. .	. .	116	13572	6786	3393	. .
82	6806	3403	. .	. .	117	13806	6903	. .	. .
83	6972	3486	1743	. .	118	14042	7021	. .	. .
84	7140	3570	1785	. .	119	14280	7140	. .	3570
85	7310	3655	. .	. .	120	14520	7260	. .	3630
86	7482	3741	. .	. .	121	14762	7381	. .	. .
87	7656	3828	. .	1914	122	15006	7503	. .	. .
88	7832	3916	. .	1958	123	15252	7626	3813	. .
89	8010	4005	. .	. .	124	15500	7750	3875	. .
90	8190	4095	. .	. .	125	15750	7875	. .	. .
91	8372	4186	2083	. .	126	16002	8001	. .	. .
92	8556	4278	2139	. .	127	16256	8128	. .	4064
93	8742	4371	. .	. .	128	16512	8256	. .	4128
94	8930	4465	. .	. .	129	16770	8385	. .	. .
95	9120	4560	. .	2280	130	17030	8515	. .	. .
96	9312	4656	. .	2328	131	17292	8646	4323	. .
97	9506	4753	. .	. .	132	17556	8778	4389	. .
98	9702	4851	. .	. .	133	17822	8911	. .	. .
99	9900	4959	2475	. .	134	18090	9045	. .	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ / 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ / 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ / 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ / 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ / 4	Numeri pares formae $m(m-1)$ / 4
135	18360	9180	. .	4590	170	29070	14535	. .	. .
136	18632	9316	. .	4658	171	29412	14706	7353	. .
137	18906	9453	. .	. .	172	29756	14878	7439	. .
138	19182	9591	. .	. .	173	30102	15051	. .	. .
139	19460	9730	4865	. .	174	30450	15225	. .	. .
140	19740	9870	4935	. .	175	30800	15400	. .	7700
141	20022	10011	. .	. .	176	31152	15576	. .	9288
142	20306	10153	. .	. .	177	31506	15753	. .	. .
143	20592	10296	. .	5148	178	31862	15931	. .	. .
144	20880	10440	. .	5220	179	32220	16110	8035	. .
145	21170	10585	. .	. .	180	32580	16290	8145	. .
146	21462	10731	. .	. .	181	32942	16471	. .	. .
147	21756	10878	5429	. .	182	33306	16653	. .	. .
148	22052	11026	5513	. .	183	33672	16836	. .	8418
149	22350	11175	. .	.	184	34040	17020	. .	8510
150	22650	11325	. .	. .	185	34410	17205	. .	. .
151	22952	11476	. .	5738	186	34782	17391	. .	. .
152	23256	11628	. .	5814	187	35156	17578	8789	. .
153	23562	11781	. .	. .	188	35532	17766	8883	. .
154	23870	11935	. .	. .	189	35910	17955	. .	. .
155	24180	12090	6045	. .	190	36280	18145	. .	. .
156	24492	12246	6123	. .	191	36672	18336	. .	9168
157	24806	12403	. .	. .	192	37056	18528	. .	9264
158	25122	12561	. .	. .	193	37442	18721	. .	. .
159	25440	12720	. .	6360	194	37830	18915	. .	. .
160	25760	12880	. .	6440	195	38220	19110	9555	. .
161	26082	13041	. .	. .	196	38612	19306	9653	. .
162	26406	13203	. .	. .	197	39006	19503	. .	. .
163	26732	13366	6683	. .	198	39402	19701	. .	. .
164	27060	13530	6765	. .	199	39800	19900	. .	9950
165	27390	13695	. .	. .	200	40200	20100	. .	10050
166	27722	13861	. .	. .	201	40602	20301	. .	. .
167	28056	14028	. .	7014	202	41006	20503	. .	. .
168	28392	14196	. .	7098	203	41412	20706	10353	. .
169	28730	14365	. .	. .	204	41820	20910	10455	. .

Radix

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
205	42230	21115	. .	. .	240	57840	28920	. .	14460
206	42642	21321	. .	. .	241	58322	29161	. .	. .
207	43056	21528	. .	10764	242	58806	29403	. .	. .
208	43472	21736	. .	10868	243	59292	29646	14823	. .
209	43890	21945	. .	. .	244	59780	29890	14945	. .
210	44310	22155	. .	. .	245	60270	30135	. .	. .
211	44732	22366	11183	. .	256	60762	20381	. .	. .
212	45156	22578	11289	. .	247	61256	30628	. .	15314
213	45582	22791	. .	. .	248	61752	30876	. .	15438
214	46010	23005	. .	. .	249	62250	31125	. .	. .
215	46440	23220	. .	11610	250	62750	31375	. .	. .
216	46872	23436	. .	11718	251	63252	31626	15813	. .
217	47306	23653	. .	. .	252	63756	31878	15939	. .
218	47742	23871	. .	. .	253	64262	32131	. .	. .
219	48180	24090	12045	. .	254	64770	32385	. .	. .
220	48620	24310	12155	. .	255	65280	32640	. .	16320
221	49062	24531	. .	. .	256	65792	32896	. .	16448
222	49506	24753	. .	. .	257	66306	33153	. .	. .
223	49952	24976	. .	12488	258	66822	33411	. .	. .
224	50400	25200	. .	12600	259	67340	33670	16835	. .
225	50850	25425	. .	. .	260	67860	33930	16965	. .
226	51302	25651	. .	. .	261	68382	34191	. .	. .
227	51756	25878	12939	. .	262	68906	34453	. .	. .
228	52212	26106	13053	. .	263	69432	34716	. .	17358
229	52670	26335	. .	. .	264	69960	34980	. .	17490
230	53130	26565	. .	. .	265	70490	35245	. .	. .
231	53592	26796	. .	13398	266	71022	35511	. .	. .
232	54056	27028	. .	13514	267	71556	35778	17889	. .
233	54522	27261	. .	. .	268	72092	36046	18043	. .
234	54990	27495	. .	. .	269	72630	36315	. .	. .
235	55460	27730	13865	. .	270	73170	36585	. .	. .
236	55932	27966	13983	. .	271	73712	36856	. .	18428
237	56406	28203	. .	. .	272	74256	37128	. .	18564
238	56882	28441	. .	. .	273	74802	37401	. .	. .
239	57360	28680	. .	14340	274	75350	37675	. .	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$	Numeri impares formae $m(m+1)$	Numeri pares formae $m(m+1)$	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$	Numeri impares formae $m(m+1)$	Numeri pares forma $m(m+1)$
	1	2	4	4			2	4	4
275	75900	37950	18975	. .	310	96410	48205	. .	. .
276	76452	38226	19113	. .	311	97032	48516	. .	24258
277	77006	38503	. .	. .	312	97656	48828	. .	24414
278	77562	38781	. .	. .	313	98282	49141	. .	. .
279	78120	39060	. .	19530	314	98910	49455	. .	. .
280	78680	39340	. .	19670	315	99540	49770	24885	. .
281	79242	39621	. .	. .	316	100172	50086	25043	. .
282	79806	39903	. .	. .	317	100809	50403	. .	. .
283	80372	40186	20093	. .	318	101442	50721	. .	. .
284	80940	40470	20235	. .	319	102080	51040	. .	25520
285	81510	40755	. .	. .	320	102720	51360	. .	25630
286	82082	41041	. .	. .	321	103362	51681	. .	. .
287	83656	41328	. .	20664	322	104006	52003	. .	. .
288	83232	41616	. .	20808	323	104652	52326	26163	. .
289	83810	41905	. .	. .	324	105300	52650	26325	. .
290	84390	42195	. .	. .	325	105950	52975	. .	. .
291	84972	42486	21243	. .	326	106602	53301	. .	. .
292	85556	42778	21389	. .	327	107256	53628	. .	26814
293	86142	43071	. .	. .	328	107912	53956	. .	26978
294	86730	43365	. .	. .	329	108570	54285	. .	. .
295	87320	43660	. .	21830	330	109230	54615	. .	. .
296	87912	43956	. .	21978	331	109892	54946	27473	. .
297	88506	44253	. .	. .	332	110556	55278	27639	. .
298	89102	44501	. .	. .	333	111222	55611	. .	. .
299	89700	44850	22425	. .	334	111890	55945	. .	. .
300	90300	45650	22825	. .	335	112560	56280	. .	28140
301	90902	45451	. .	. .	336	113232	56616	. .	28308
302	91506	45753	. .	. .	337	113906	56953	. .	. .
303	92112	46056	. .	23028	338	114582	57291	. .	. .
304	92720	46360	. .	23180	339	115260	57630	28815	. .
305	93330	46665	. .	. .	340	115940	57970	28985	. .
306	93942	46971	. .	. .	341	116622	58311	. .	. .
307	94556	47278	23639	. .	342	117306	58653	. .	. .
308	95172	47586	23793	. .	343	117992	58996	. .	29498
309	95790	47895	. .	. .	344	118680	59340	. .	29670

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $\frac{1}{2}(m+1)m$	Numeri impares formae $\frac{1}{4}(m+1)m$	Numeri pares formae $\frac{1}{4}m(m+1)$
345	119370	59685	. .	. .
346	120062	60031	. .	. .
347	120756	60378	30189	. .
348	121452	60726	30363	. .
349	122150	61025	. .	. .
350	122850	61425	. .	. .
351	123552	61776	. .	30888
352	124256	62128	. .	31064
353	124962	62481	. .	. .
354	125670	62835	. .	. .
355	126380	63190	31595	. .
356	127092	63546	31773	. .
357	127806	63903	. .	. .
358	128522	64261	. .	. .
359	129240	64620	. .	32310
360	129960	64980	. .	32490
361	130682	65341	. .	. .
362	131406	65703	. .	. .
363	132132	66066	33033	. .
364	132860	66430	33215	. .
365	133590	66795	. .	. .
366	134322	67161	. .	. .
367	135056	67528	. .	33764
368	135792	67896	. .	33948
369	136530	68265	. .	. .
370	137270	68635	. .	. .
371	138012	69006	34503	. .
372	138756	69378	34689	. .
373	139502	69751	. .	. .
374	140250	70125	. .	. .
375	141000	70500	. .	35250
376	141752	70876	. .	35438
377	142506	71253	. .	. .
378	143262	71631	. .	. .
379	144020	72010	36005	. .
380	144780	72390	36195	. .
381	145542	72771	. .	. .
382	146306	73153	. .	. .
383	147072	73536	. .	36768
384	147840	73920	. .	36960
385	148610	74305	. .	. .
386	149382	74691	. .	. .
387	150156	75078	37539	. .
388	150932	75466	37733	. .
389	151710	75855	. .	. .
390	152490	76245	. .	. .
391	153272	76636	. .	38318
392	154056	77028	. .	38514
393	154842	77421	. .	. .
394	155630	77815	. .	. .
395	156420	78210	39105	. .
396	157212	78606	39303	. .
397	158006	79003	. .	. .
398	158802	79401	. .	. .
399	159600	79800	. .	39900
400	160400	80200	. .	40100
401	161202	80601	. .	. .
402	162006	81003	. .	. .
403	162812	81406	40703	. .
404	163620	81810	40905	. .
405	164430	82215	. .	. .
406	165242	82621	. .	. .
407	166056	83028	. .	41514
408	166872	83436	. .	41718
409	167690	83845	. .	. .
410	168510	84205	. .	. .
411	169332	84666	42333	. .
412	170156	85078	42539	. .

Radix

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m.(m+1)$	Numeri formae $m.(m+1)$ / 2	Numeri impares formae $m.(m+1)$ / 4	Numeri pares formae $m.(m+1)$ / 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m.(m+1)$	Numeri formae $m.(m+1)$ / 2	Numeri impares formae $m.(m+1)$ / 4	Numeri pares formae $m.(m+1)$ / 4
413	170982	85491	. .	. .	447	200256	100128	. .	50064
414	171810	85905	. .	. .	448	201152	100576	. .	50288
415	172640	86320	. .	43160	449	202050	101025	. .	. .
416	173472	86736	. .	43368	450	202950	101475	. .	. .
417	174306	87153	. .	. .	451	203852	101926	50963	. .
418	175142	87571	. .	. .	452	204756	102378	51189	. .
419	175980	87990	43995	. .	453	205662	02831	. .	. .
420	176820	88410	44205	. .	454	206570	03285	. .	. .
421	177662	88831	. .	. .	455	207480	103740	. .	51870
422	178506	89253	. .	. .	456	208392	104196	. .	52098
423	179352	89676	. .	44838	457	209306	104653	. .	. .
424	180200	90100	. .	45050	458	210222	105111	. .	. .
425	181050	90525	. .	. .	459	211140	105570	52785	. .
426	181902	90951	. .	. .	460	212060	106030	53015	. .
427	182756	91378	45689	. .	461	212982	106491	. .	. .
428	183612	91806	45903	. .	462	213906	106953	. .	. .
429	184470	92235	. .	. .	463	214832	107416	. .	53708
430	185330	92665	. .	. .	464	215760	107880	. .	53940
431	186192	93096	. .	46548	465	216690	108345	. .	. .
432	187056	93528	. .	46764	466	217622	108811	. .	. .
433	187922	93961	. .	. .	467	218556	109278	54639	. .
434	188790	94395	. .	. .	468	219492	109746	54873	. .
435	189660	94830	47415	. .	469	220430	110215	. .	. .
436	190532	95266	47633	. .	470	221370	110685	. .	. .
437	191406	95703	. .	. .	471	222312	111156	. .	55578
438	192282	96141	. .	. .	472	223256	111628	. .	55814
439	193160	96580	. .	48290	473	224202	112101	. .	. .
440	194040	97020	. .	48510	474	225150	112575	. .	. .
441	194922	97461	. .	. .	475	226100	113050	56525	. .
442	195806	97903	. .	. .	476	227052	113526	56763	. .
443	196692	98346	49173	. .	477	228006	114003	. .	. .
444	197580	98790	49395	. .	478	228962	114481	. .	. .
445	198470	99235	. .	. .	479	229920	114960	. .	57480
446	199362	99681	. .	. .	480	23088o	115440	. .	57720

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $n(n-1)$ 2	Numeri impares formae $m(n+1)$ 4	Numeri pares formae $n(m+1)$ 4
481	231842	115921	. .	. .
482	232806	116403	. .	. .
483	233772	116886	58443	. .
484	234740	117370	58685	. .
485	235710	117855	. .	. .
486	236682	118341	. .	. .
487	237656	118828	. .	59414
488	238632	119316	. .	59658
489	239610	119805	. .	. .
490	240590	120295	. .	. .
491	241572	120786	60393	. .
492	242556	121278	60639	. .
493	243542	121771	. .	. .
494	244530	122265	. .	. .
495	245520	122760	. .	61380
496	246512	123256	. .	61628
497	247506	123753	. .	. .
498	248502	124251	. .	. .
499	249500	124750	62375	. .
500	250500	125250	62625	. .
501	251502	125751	. .	. .
502	252506	126253	. .	. .
503	253512	126756	. .	63378
504	254520	127260	. .	63630
505	255530	127765	. .	. .
506	256542	128271	. .	. .
507	257556	128778	64389	. .
508	258572	129286	64643	. .
509	259590	129795	. .	. .
510	260610	130305	. .	. .
511	261632	130816	. .	65408
512	262656	131328	. .	65664
513	263682	131841	. .	. .
514	264710	132355	. .	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$	Numeri impares formae $m(n+1)$ 4	Numeri pares formae $n(m+1)$ 4
515	265740	132870	66435	. .
516	266772	133386	66693	. .
517	267806	133903	. .	. .
518	268842	134421	. .	. .
519	269880	134940	. .	67470
520	270920	135460	. .	67730
521	271962	135981	. .	. .
522	273006	136503	. .	. .
523	274052	137025	68513	. .
524	275100	137550	68775	. .
525	276150	138075	. .	. .
526	277202	138601	. .	. .
527	278256	139128	. .	69564
528	279312	139656	. .	69828
529	280370	140185	. .	. .
530	281430	140715	. .	. .
531	282492	141246	70623	. .
532	283556	141778	70889	. .
533	284622	142311	. .	. .
534	285690	142845	. .	. .
535	286760	143380	. .	71690
536	287832	143916	. .	71958
537	288906	144453	. .	. .
538	289982	144991	. .	. .
539	291060	145530	72765	. .
540	292140	146070	73035	. .
541	293222	146611	. .	. .
542	294306	147153	. .	. .
543	295392	147696	. .	73848
544	296480	148240	. .	74120
545	297570	148785	. .	. .
546	298662	149331	. .	. .
547	299756	149878	74939	. .
548	300852	150426	75213	. .

Radix

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
549	301950	150975	. .	. .
550	303050	151525	. .	. .
551	304152	152076	. .	76038
552	305256	152628	. .	76314
553	306362	153181	. .	. .
554	307470	153735	. .	. .
555	308580	154290	77145	. .
556	309692	154846	77423	. .
557	310806	155403	. .	. .
558	311922	155961	. .	. .
559	313040	156520	. .	78260
560	314160	157080	. .	78540
561	315282	157641	. .	. .
562	316406	158203	. .	. .
563	317532	158766	79383	. .
564	318660	159330	79665	. .
565	319790	159895	. .	. .
566	320922	160461	. .	. .
567	322056	161028	. .	80514
568	323192	161596	. .	80798
569	324330	162165	. .	. .
570	325470	162735	. .	. .
571	326612	163306	81653	. .
572	327756	163878	81939	. .
573	328902	164451	. .	. .
574	330050	165025	. .	. .
575	331200	165600	. .	82800
576	332352	166176	. .	83088
577	333506	166753	. .	. .
578	334662	167331	. .	. .
579	335820	167910	83955	. .
580	336980	168490	84245	. .
581	338141	169071	. .	. .
582	339306	169653	. .	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
583	340472	170236	. .	85118
584	341640	170820	. .	85410
585	342810	171405	. .	. .
586	343982	171991	. .	. .
587	345156	172578	86289	. .
588	346332	173166	86583	. .
589	347510	173755	. .	. .
590	348690	174345	. .	. .
591	349872	174936	. .	87468
592	351056	175528	. .	87764
593	352242	176121	. .	. .
594	353430	176715	. .	. .
595	354620	177310	88655	. .
596	355812	177906	88953	. .
597	357006	178503	. .	. .
598	358002	179001	. .	. .
599	359400	179700	. .	89850
600	360600	180300	. .	90150
601	361802	180901	. .	. .
602	363006	181503	. .	. .
603	364212	182106	91053	. .
604	365420	182710	91355	. .
605	366630	183315	. .	. .
606	367842	183921	. .	. .
607	369056	184528	. .	92264
608	370272	185136	. .	92568
609	371490	185745	. .	. .
610	372710	186355	. .	. .
611	373932	186966	93483	. .
612	375156	187578	93789	. .
613	376382	188191	. .	. .
614	377610	188805	. .	. .
615	378840	189420	. .	94710
616	380072	190036	. .	95018

Radix

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $\frac{m(m+1)}{2}$	Numeri impares formae $\frac{m(m+1)}{4}$	Numeri pares formae $\frac{m(m+1)}{4}$	Radix num ri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $\frac{m(m+1)}{2}$	Numeri impares formae $\frac{m(m+1)}{4}$	Numeri pares formae $\frac{m(m+1)}{4}$
617	381306	190653	. .	. .	651	424452	221226	106113	. .
618	382542	191271	. .	. .	652	425756	212878	196439	. .
619	383780	191890	95945	. .	653	427062	213531	. .	. .
620	385020	197510	98755	. .	654	428370	214185	. .	. .
621	386262	193231	. .	. .	655	429680	214840	. .	107420
622	387506	193753	. .	. .	656	430992	215496	. .	107748
623	388752	194376	. .	97188	657	432306	216153	. .	. .
624	390000	195000	. .	97500	658	433622	216811	. .	. .
625	391250	195625	. .	. .	659	434940	217470	108735	. .
626	392502	196251	. .	. .	660	436260	218130	109065	. .
627	393756	196878	98439	. .	661	437582	218791	. .	. .
628	395012	197506	98753	. .	662	438906	219453	. .	. .
629	396270	198135	. .	. .	663	440232	220116	. .	110158
630	397530	198765	. .	. .	664	441560	220780	. .	110390
631	398792	199396	. .	99698	665	442890	221445	. .	. .
632	400056	200029	. .	108014	666	444222	222111	. .	. .
633	401322	200661	. .	. .	667	445556	222778	111389	. .
634	402590	201295	. .	. .	668	446892	223446	111723	. .
635	403860	201930	100965	. .	669	448230	224115	. .	. .
636	405132	202466	101283	. .	670	449570	224785	. .	. .
637	406406	203203	. .	. .	671	450912	225456	. .	112728
638	407682	203841	. .	. .	672	452256	226128	. .	113064
639	408960	204480	. .	203240	673	453602	226801	. .	. .
640	410240	205120	. .	102560	674	454950	227475	. .	. .
641	411522	205761	. .	. .	675	456300	228150	114075	. .
642	412806	106403	. .	. .	676	457652	228826	114413	. .
643	414092	207046	203523	. .	677	459006	229503	. .	. .
644	415380	207690	103856	. .	678	469362	230181	. .	. .
645	416670	208335	. .	. .	679	461720	230860	. .	115430
646	417962	208981	. .	. .	680	463080	231540	. .	115770
647	419256	209628	. .	104814	681	464442	232221	. .	. .
648	420552	210276	. .	195138	682	465806	232903	. .	. .
649	421850	216925	. .	. .	683	467172	233586	116793	. .
650	423150	211570	. .	. .	684	468540	234170	117085	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
685	469910	234955	. .	. .
686	471282	335641	. .	. .
687	472656	236328	. .	118164
688	474032	237016	. .	118508
689	475410	237705	. .	. .
690	476790	238395	. .	. .
691	478172	239086	119543	. .
692	479556	239778	119889	. .
693	480942	240471	. .	. .
694	482330	241165	. .	. .
695	483720	241860	. .	120430
696	485112	242556	. .	121278
697	486506	243253	. .	. .
698	487902	243951	. .	. .
699	489300	244650	122325	. .
700	490700	245350	122675	. .
701	492102	246051	. .	. .
702	493506	246753	. .	. .
703	494912	247456	. .	123728
704	496320	248160	. .	124080
705	497730	248865	. .	. .
706	499142	249571	. .	. .
707	500556	250278	125139	. .
708	501972	250986	125493	. .
709	503390	251695	. .	. .
710	504810	252405	. .	. .
711	506232	253116	. .	126558
712	507656	253828	. .	126914
713	509082	254541	. .	. .
714	510510	255255	. .	. .
715	511940	255970	127985	. .
716	513372	256686	128343	. .
717	514806	257403	. .	. .
718	516242	258121	. .	. .
719	517680	258840	. .	129420
720	519120	259560	. .	129780
721	520562	260281	. .	. .
722	522006	261003	. .	. .
723	523452	261726	130863	. .
724	524900	262450	131225	. .
725	526350	263175	. .	. .
726	527802	263901	. .	. .
727	529256	264628	. .	132314
728	530712	265356	. .	132678
729	532170	266085	. .	. .
730	533630	266815	. .	. .
731	535092	267546	133773	. .
732	536556	268278	134139	. .
733	538022	269011	. .	. .
734	539490	269745	. .	. .
735	540960	270480	. .	135240
736	542432	271216	. .	135608
737	543906	271953	. .	. .
738	545382	272691	. .	. .
739	546860	273430	136715	. .
740	548340	274170	137085	. .
741	549822	274911	. .	. .
742	551306	275653	. .	. .
743	552792	276396	. .	138198
744	554280	277140	. .	138570
745	555770	277885	. .	. .
746	557262	278631	. .	. .
747	558756	279378	139689	. .
748	560256	280126	140063	. .
749	561750	280875	. .	. .
750	563250	281625	. .	. .
751	564752	282376	. .	141188
752	566256	283128	. .	141564

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
753	567762	283881	. .	. .	787	620156	310078	155039	. .
754	569270	284635	. .	. .	788	621732	310866	155433	. .
755	570780	285390	142695	. .	789	623310	311655	. .	. .
756	572292	286146	143073	. .	790	624890	312445	. .	. .
757	573806	286903	. .	. .	791	626472	313236	. .	15661
758	575322	287661	. .	. .	792	628056	314028	. .	157014
759	576840	288420	. .	144210	793	629642	314821	. .	. .
760	578360	289180	. .	144590	794	631230	315615	. .	. .
761	579882	289941	. .	. .	795	632820	316410	158205	. .
762	581406	290703	. .	. .	796	634412	317206	158603	. .
763	582932	291466	145733	. .	797	636006	318003	. .	. .
764	584460	292230	146115	. .	798	637602	318801	. .	. .
765	585990	292995	. .	. .	799	639200	319600	. .	159800
766	587522	293761	. .	. .	800	640800	320400	. .	160200
767	589056	294528	. .	147264	801	642402	321201	. .	. .
768	590592	295296	. .	147648	802	644006	322003	. .	. .
769	592130	296065	. .	. .	803	645612	322806	161403	. .
770	593670	296835	. .	. .	804	647220	323610	161805	. .
771	595212	297606	148803	. .	805	648830	324415	. .	. .
772	596756	298378	149189	. .	806	650452	325226	. .	. .
773	598302	399151	. .	. .	807	652056	326028	. .	163014
774	599850	299925	. .	. .	808	653672	326836	. .	163418
775	601400	300700	. .	150350	809	655290	327645	. .	. .
776	602952	301476	. .	150738	810	657910	328955	. .	. .
777	604506	302253	. .	. .	811	658532	329766	164883	. .
778	606062	303031	. .	. .	812	660156	330078	165039	. .
779	607620	303810	151905	. .	813	661782	330891	. .	. .
780	609180	304490	152295	. .	814	663410	331705	. .	. .
781	610742	305371	. .	. .	815	665040	332520	. .	166260
782	512306	306153	. .	. .	816	666672	333336	. .	166668
783	613872	306936	. .	153468	817	668306	334153	. .	. .
784	615440	307720	. .	153860	818	670942	335471	. .	. .
785	617010	308505	. .	. .	819	672580	336290	168145	. .
786	618582	309291	. .	. .	820	673220	336610	168305	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares forma $m(m+1)$ 4
821	674862	337431	. .	. .	856	733592	366796	. .	183398
822	676506	338253	. .	. .	857	735306	367653	. .	. .
823	678152	339076	. .	169538	858	737022	368511	. .	. .
824	679800	339900	. .	169950	859	738740	369370	184685	. .
825	681450	340725	. .	. .	860	740460	370230	185115	. .
826	683102	341551	. .	. .	861	742182	371091	. .	. .
827	684756	342378	171189	. .	862	743906	371953	. .	. .
828	686412	343206	171603	. .	863	745632	372816	. .	186408
829	688070	344035	. .	. .	864	747360	373680	. .	186840
830	689730	344865	. .	. .	865	749090	374545	. .	. .
831	691392	345696	. .	172848	866	750822	375411	. .	. .
832	693056	346528	. .	173264	867	752556	376278	188139	. .
833	694722	347361	. .	. .	868	754292	377146	188573	. .
834	696390	348195	. .	. .	869	756030	378015	. .	. .
835	698060	349030	174515	. .	870	757770	378885	. .	. .
836	699732	349866	174933	. .	871	759512	379756	. .	189878
837	701406	350703	. .	. .	872	761256	380628	. .	190314
838	703082	351541	. .	. .	873	763002	381501	. .	. .
839	704760	352380	. .	176190	874	764750	382375	. .	. .
840	706440	353220	. .	176610	875	766500	383250	191625	. .
841	708122	354061	. .	. .	876	768252	384126	192063	. .
842	709806	354903	. .	. .	877	770006	385003	. .	. .
843	711492	355746	177873	. .	878	771262	385631	. .	. .
844	713180	356590	178295	. .	879	773520	386760	. .	193380
845	714870	357435	. .	. .	880	775280	387640	. .	193820
846	716562	358281	. .	. .	881	777042	388521	. .	. .
847	718256	359128	. .	179564	882	778806	389403	. .	. .
848	719952	359976	. .	179988	883	780572	390286	195143	. .
849	721650	360825	. .	. .	884	782340	391170	198585	. .
850	723350	361675	. .	. .	885	784110	392055	. .	. .
851	725052	362526	181263	. .	886	785882	392941	. .	. .
852	726756	363378	181689	. .	887	787656	393828	. .	196914
853	728462	364231	. .	. .	888	789432	394716	. .	197358
854	730170	365085	. .	. .	889	791210	395605	. .	. .
855	731880	365940	. .	182970	890	792990	396495	. .	. .

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4	Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$	Numeri impares formae $m(m+1)$ 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ 4
891	794772	397386	198693	. .	925	856550	428275	. .	. .
892	796556	398278	199139	. .	926	858402	429201	. .	. .
893	798342	399171	. .	. .	927	860256	430128	. .	215064
894	800130	400065	. .	. .	928	862112	431056	. .	215528
895	801920	400960	. .	200480	929	863970	431985	. .	. .
896	803712	401856	. .	200928	830	865830	432915	. .	. .
897	805506	402753	. .	. .	931	867692	433846	216923	. .
898	80 302	403651	. .	. .	932	869556	434778	217389	. .
899	809100	404550	202275	. .	933	871422	435711	. .	. .
900	810900	405450	202725	. .	934	873290	436645	. .	. .
901	812702	406351	. .	. .	935	875160	437580	. .	218790
902	814506	407253	. .	. .	936	877032	438516	. .	219258
903	816312	408156	. .	204078	937	878906	439453	. .	. .
904	818120	409060	. .	204530	938	880782	440396	. .	. .
905	819930	409965	. .	. .	939	882660	441330	220 65	. .
906	821742	410871	. .	. .	940	884540	442270	221135	. .
907	823556	411778	205889	. .	941	886422	443211	. .	. .
908	825372	412686	206343	. .	942	888306	444153	. .	. .
909	827190	413595	. .	. .	943	890192	445596	. .	222798
910	829010	414505	. .	. .	944	892080	446040	. .	223020
911	830832	415416	. .	207708	945	893970	446985	. .	. .
912	832656	416328	. .	208164	946	895862	447931	. .	. .
913	834482	417241	. .	. .	947	897756	448878	224439	. .
914	836310	418155	. .	. .	948	899652	449826	224913	. .
915	838140	419070	209535	. .	949	901550	450775	. .	. .
916	839972	419986	209993	. .	950	903450	451725	. .	. .
917	841806	420903	. .	. .	951	905352	452676	. .	226338
918	843642	421821	. .	. .	952	907256	453628	. .	326814
919	845480	422740	. .	211370	953	909162	454581	. .	. .
920	847320	423660	. .	211830	954	911070	455535	. .	. .
921	849162	424581	. .	. .	955	912980	456490	228245	. .
922	851006	425503	. .	. .	956	914892	457446	228723	. .
923	852852	426426	213213	. .	957	916806	458403	. .	. .
924	854700	427350	213675	. .	958	918722	459861	. .	. .

Radix

Radix numeri pronici m	Numeri pronici $m(m+1)$	Numeri formae $m(m+1)$ / 2	Numeri impares formae $m(m+1)$ / 4	Numeri pares formae $m(m+1)$ / 4
959	920640	460320	. .	230160
960	922560	461280	. .	230640
961	924482	462241	. .	. .
962	926406	463203	. .	. .
963	928332	464166	232083	. .
964	930260	465130	232565	. .
965	932190	466095	. .	. .
966	934122	467061	. .	. .
967	936056	468028	. .	234014
968	637992	468996	. .	234498
969	939930	469965	. .	. .
970	941870	470935	. .	. .
971	943812	471906	235953	. .
972	945756	472878	236439	. .
973	947702	473851	. .	. .
974	949650	474825	. .	. .
975	951600	475800	. .	237900
976	953552	476776	. .	239388
977	955506	477753	. .	. .
978	957462	478731	. .	. .
979	959420	479710	239855	. .
980	961380	480690	240345	. .
981	963342	481671	. .	. .
982	965306	482653	. .	. .
983	967272	483636	. .	241818
984	969240	484620	. .	242310
985	971210	485605	. .	. .
986	973182	486591	. .	. .
987	975156	487578	243789	. .
988	977132	488566	244283	. .
989	979110	489555	. .	. .
990	981090	490545	. .	. .
991	983072	491536	. .	245768
992	985056	492528	. .	246264
993	987042	493521	. .	. .
994	989030	494515	. .	. .
995	991020	495510	247755	. .
996	993012	496506	248253	. .
997	995006	497503	. .	. .
998	997002	498501	. .	. .
999	99900	499500	. .	249750
1000	1001000	500500	. .	250250

REMARQUES
pour faciliter la recherche des diviseurs des nombres premiers.

Par *C. F. Kausler.*

Présenté à la Conférence le 17 Juin 1801.

§. 1.

Dans le mémoire: „De numeris qui semel vel pluries in „summam duorum quadratorum resolvi possunt“ inséré dans le XIV. Tome des Nouveaux Actes de l'Académie, j'ai fait voir de quelle manière on peut faire usage des nombres pronics, pour décomposer, si cela est possible, un nombre impair donné en deux carrés, par le moyen desquels on pourra ensuite reconnoître, si ce nombre est premier ou non, et quels sont ses diviseurs. Mais quelques simples que soient les calculs que cette méthode exige, on regrettera toujours que les avantages qui en résultent, pour trouver ces diviseurs, ne soient que partiels, puisqu'ils ne s'étendent qu'aux nombres de la forme $4m+1$, lorsque ceux-ci sont une ou plusieurs fois la somme de deux carrés premiers entr' eux.

Je m'occupois de cette théorie et des moyens de l'appliquer aussi aux autres nombres qui sont la somme de trois ou quatre carrés, lorsque je reçus l'excellent ouvrage de Mr. *Le Gendre*, intitulé: „Essai d'une théorie des nombres“ dans lequel cet auteur aussi savant que modeste a réuni en une science intéressante toutes les différentes découvertes faites jusqu'ici dans l'Analyse indéterminée, en y ajoutant les

les siennes propres, lesquelles en reculant de beaucoup les limites de cette sublime science, ouvrent un vaste champ à des recherches ultérieures. Entre autres il y indique plusieurs moyens pour examiner si un nombre donné quelconque est premier ou non. Ces moyens qui s'appliquent à tous les nombres impairs sans exception, me paroissent mériter la plus grande attention: et s'il reste encore quelque chose à desirer, pour porter cette méthode à sa dernière perfection, les difficultés qu'elle présente n'ont, à ce qu'il me semble, rien d'insurmontable.

Cést à cette méthode que se rapportent les petites remarques qui vont faire le sujet du mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Elles serviront à abréger encore d'avantage les calculs que préscrit la théorie mentionnée: la premiére en montrant de quelle maniere on pourra employer les tables connues des nombres premiers, et des diviseurs des nombres, à l'examen des nombres qui surpassent les limites de ces tables, et la seconde, en contenant une nouvelle méthode d'examiner la divisibilité d'un nombre quelconque par un ou plusieurs autres nombres donnés. Dans une matière aussi difficile que celle de la recherche des diviseurs des nombres, tout ce qui peut y répandre quelque jour est digne de notre attention, et le plus petit pas qu'on fait vers un terme désiré et difficile à atteindre, ne sauroit jamais être indifférent.

§. 2. La méthode de Mr. *Le Gendre*, à laquelle se rapportent les remarques dont nous parlons ici, se trouve détaillée dans la seconde partie de son ouvrage, auquel je renvoie

renvoie le lecteur, d'autant qu'il seroit impossible de présenter, dans un extrait, une théorie fort étendue et presqu'entièrement nouvelle. Je me contenterai donc d'en donner ici une idée legère.

1°) Le savant auteur examine d'abord la formule $t^2 + cu^2$ par rapport à ses diviseurs simples et quadratiques. Les premiers, lesseuls qui conviennent à notre but, se réduisent toujours, pour chaque valeur de c, à la forme $\alpha x + \beta$, α et β étant des nombres dépendans de c. Cést à cette valeur de c que se rapportent plusieurs tables ajoutées à la fin de l'ouvrage et calculeés par Mr. *le Gendre*, d'après des formules qui résultent de sa théorie. Telle est la table III qui contient tous les diviseurs simples de la formule $t^2 - cu^2$, pour toutes les valeurs de c depuis 2 jusqu'à 79, à l'exception des nombres carrés ou multipliés par un facteur quadratique: C'est ainsi qu'on trouve, p. e. à côté de la formule $t^2 - 30u^2$ les diviseurs simples suivans:

$120x + 1, 19, 49, 91,$
$120x + 29, 71, 101, 119,$
$120x + 17, 83, 107, 113,$
$120x + 7, 13, 37, 103,$

et cela veut dire qu'un nombre qui est de la forme $t^2 - 30u^2$, s'il a des diviseurs simples, ne sauroit en avoir d'autres que ceux qui sont d'une des formes: $120x + 1$, $120x + 19$, $120x + 49$ &c. En faisant p. e. $t = 97$, $u = 2$, la formule $t^2 - 30u^2$ devient 9289 Or ce nombre est le produit des diviseurs simples 7 et 1327, dont le premier se déduit de la forme $120x + 7$, en y mettant $x = 0$, et le second de la forme $120x + 7$, en y faisant $x = 11$.

La table IV contient de même les diviseurs de la formule

formule $t^2 + au^2$, pour tous les a de la forme $4m + 1$, depuis 1 jusqu'à 105.

La table V contient les diviseurs de $t^2 + au^2$, pour les a de la forme $4m - 1$, depuis 1 jusqu'à 103.

La table VI renferme les diviseurs de la formule $t^2 + 2au^2$, pour tous les a de la forme $4m + 1$, depuis 1 jusqu'à 53.

Enfin la table VII donne les diviseurs de $t^2 + 2au^2$ pour les a de la forme $4m - 1$, depuis 1 jusqu'à 51.

2) Cela posé, tout revient à décomposer le nombre dont on cherche les diviseurs, en plusieurs formules, telles que $t^2 + au^2$, ou $t^2 - au^2$. Plusieurs moyens sont propres à ce but.

α) Le premier consiste à extraire successivement la racine carrée du nombre donné A, ou de ses multiples 2A, 3A, ... kA, jusqu'à ce qu'on parvienne à des restes positifs ou négatifs de la forme $\pm au^2$, le nombre a étant un de ceux qui sont compris dans les tables dont nous venons de parler. Plus on trouve de ces restes, plus la recherche des diviseurs sera abrégée.

β) Le second moyen est de réduire $\sqrt{A}$, ou $\sqrt{2A}$, $\sqrt{3A}$, . . . $\sqrt{k}A$, en une fraction continue, ensorte qu'on ait:

$$\sqrt{k}A = \alpha + \frac{1}{x}, \; x' = \beta + \frac{1}{x''}, \; x'' = \gamma + \frac{1}{x'''} \text{ &c.}$$

où les quantités x', x'', x''' etc. sont appellées Quotiens-complets, et se réduisent toujours à la forme $\frac{\sqrt{k}A - l}{m}$, (v. Essai d'une théorie des nombres, première partie §. V). Or on peut démontrer, que si $\frac{r}{q}$ est une

une des fractions convergentes vers $\sqrt{kA}$, et répondant au Quotient-complet $\frac{\sqrt{kA}+I}{D}$, on aura nécessairement $\pm D = p^2 - kAq^2$, et par conséquent $kAq^2 = p^2 \mp D$. Mais comme k, A, q, p et D sont supposés être des nombres entiers, on voit que les diviseurs de kA, ou de A, le seront aussi de $p^2 \mp D$, ou en général de $p^2 \mp Du^2$, le signe + ayant lieu, lorsque ce Quotient-complet est de rang pair, et le signe − dans le cas contraire.

Quant à la méthode de trouver les fractions convergentes vers $\sqrt{kA}$, ainsi que leurs Quotiens-complets, on la trouve détaillée dans l'ouvrage cité.

γ) Lorsque le nombre A est de la forme $g^n \pm 1$, ou seulement un diviseur de cette forme, on a, dans ce casparticulier, un moyen de plus d'abréger la recherche des diviseurs de A; car il est prouvé que tout nombre premier qui divise A est de la forme $nx + 1$, lorsque n est pair, et de la forme $2nx + 1$ dans le cas contraire.

3) Après avoir décomposé ainsi le nombre A en plusieurs formules $t^2 \pm a''u^2$, $t^2 + a'u^2$, $t^2 + a''u^2$ &c. on en choisira les plus simples, c'est-à-dire celles dont les nombres a, a', a'' &c. se trouvent dans les tables §. 2. No. 1., pour chercher ensuite les diviseurs simples de la forme $\alpha x + \beta$, $\alpha' x + \beta'$ &c. qui leur répondent, et parmi lesquels ceux de A doivent se trouver nécessairement. Mais comme les nombres de la forme $\alpha x + \beta$ ne sont pas tous compris dans la forme $\alpha' x + \beta'$, on voit qu'en admettant les deux formes à la fois, les diviseurs de A se trouvent parmi les nombres qui leur sont communs

communs à l'une et à l'autre. En combinant une troisième forme avec les deux précédentes, il est clair que ces diviseurs, pour convenir aux trois formes à la fois, se reduiront à un nombre encore plus petit, et ainsi de reste. Et puisque le nombre A, s'il n'est pas premier, a au moins un diviseur au dessous de $\sqrt{A}$, les conditions, dont nous venons de parler, serviront donc à exclure une partie d'autant plus grande des nombres premiers au dessous de ce terme, qu'on aura trouvé plus de formules $t^2 \pm au^2$ représentant A ou ses multiples.

§. 3. Voici quelques exemples pour éclaircir cette théorie:

1.) Soit proposé de chercher les diviseurs du nombre $2^{25} - 1 = 33554431$. Comme ce nombre est $= (2^5 - 1)(2^{20} + 2^{15} + 2^{10} + 2^5 + 1) = 31 . 1082401$ et que 1082401 n'est pas divisible par 31, si 1082401 a des diviseurs, ils ne peuvent être que de la forme $50x + 1$, (§. 2. N.° γ.) Or il faut au moins qu'un de ces diviseurs soit $< \sqrt{A}$, c'est-à-dire 1040, par conséquent un diviseur du nombre en question se trouvera parmi les nombres premiers de la forme $50x + 1$ qui sont au dessous de 1040. Mais comme il seroit fort long de les essayer tous les uns après les autres, il faut encore voir si le nombre proposé ne peut être représenté sous la forme $t^2 \pm au^2$. Or cette dernière se trouve d'abord; car $2A = 2^{26} - 2 = (2^{13})^2 - 2 . 1$, par conséquent 2A est de la forme $t^2 - 2u^2$. Cette formule qu'on trouve dans la table III, n'a que les deux diviseurs simples $8n + 1$ et $8n + 7$. Le diviseur que nous cherchons est donc parmi les nombres premiers au dessous de 1040, qui sont compris à la fois dans les formes $50x + 1$, $8n + 1$,

$8n+1$, $8n+7$. Pour accorder ces conditions, substituons dans la première au lieu de x les valeurs $4y$, $4y+1$, $4y+2$, $4y+3$, ce qui donne pour $50x+1$ les quatre expressions suivantes: $200y+1$, $200y+51$, $200y+101$, $200y+151$, et comme le coëfficient de y est ici multiple de 8, la comparaison de ces formules avec $8n+1$ et $8n+7$ sera très-facile: car des quatre formes $200x+1$, &c. on ne conservera que celles qui, divisées par 8, laissent 1 ou 7 pour restes. On retranchera donc les formules $200y+51$ et $200y+101$, comme ne satisfaisant point à ces conditions, ce qui reduit les formules qui contiennent le diviseur cherché, aux deux suivantes: $200y+1$ et $200y+151$. Il suffira donc d'essayer seulement tous les nombres premiers au dessous de 1040 qui sont de la forme $200y+1$, ou de $200y+151$. Or en faisant successivement $y = 0$, 1, 2, 3 &c. les nombres compris dans ces formes sont

151, 201, 351, 401, 551, 601, 751, 801, 951, 1001,

et retranchant encore ceux qui ne sont pas premiers, il n'en reste que les quatre suivans:

151, 401, 601, 751,

avec lesquels il faudra essayer de diviser le nombre donné. La division réussit avec 601, on voit donc que ce nombre est $= 601 . 1801$ et par conséquent $2^{25}-1 = 31 . 601 . 1801$.

II.) On cherche les diviseurs de $A = 2812747^2$. Ici on se servira des méthodes N°. α et β, pour trouver les diviseurs demandés. Et d'abord, en employant cette dernière, et reduisant $\sqrt{A}$ en une fraction continue, on obtient les Quotiens-complèts suivans:

1.) $\frac{\sqrt{A}+0}{1} = 1677 +$

2.) $\frac{\sqrt{A}+1671}{418} = 8 +$

3.) $\frac{\sqrt{A}+1667}{81} = 41 +$

4.) $\frac{\sqrt{A}+1654}{951} = 3 +$

5.) $\frac{\sqrt{A}+1199}{1446} = 1 +$

6.) $\frac{\sqrt{A}+247}{1903} = 1 +$

7.) $\frac{\sqrt{A}+1656}{37} = 90 +$

8.) $\frac{\sqrt{A}+1674}{283} = 11 +$

9.) $\frac{\sqrt{A}+1439}{2622} = 1 +$

10.) $\frac{\sqrt{A}+1183}{539} = 5 +$

11.) $\frac{\sqrt{A}+512}{977} = 3 +$

12.) $\frac{\sqrt{A}+1419}{818} = 3 +$

13.) $\frac{\sqrt{A}+1035}{2129} = 1 +$

14.) $\frac{\sqrt{A}+1094}{759} = 3 +$

15.) $\frac{\sqrt{A}+1183}{1862} = 1 +$

16.) $\frac{\sqrt{A}+679}{1263} = 1 +$

17.) $\frac{\sqrt{A}+584}{1957} = 1 +$

18.) $\frac{\sqrt{A}+1373}{474} = 6 +$

19.) $\frac{\sqrt{A}+1471}{1369} = 2 +$

20.) $\frac{\sqrt{A}+1267}{882} = 2 +$

&c.

Parmi les valeurs de D qui sont les dénominateurs de ces quotiens-complèts, il ne s'en trouve que les trois suivantes, dont nous pourrons faire usage, savoir:

1.) $D = 37 = 37 . 1.$
2.) $D = 539 = 11 . 7^2.$
3.) $D = 882 = 2 . 21^2.$

et comme le quotient-complèt qui repond à la première, est de rang impair, et ceux des deux autres de rang pair, les diviseurs de A seront compris dans les formules:

$$t^2 - 37u^2, \quad t^2 + 11u^2, \quad t^2 + 2u^2.$$

Or d'après les tables de Mr. *Le Gendre* les diviseurs de la formule $t^2 + 2u^2$ sont de la forme $8x + 1, 3$, et ceux de $t^2 + 11u^2$ de la forme $22x + 1, 3, 5, 9, 15$. Pour accorder ces deux conditions, comme 22 n'est pas multiple de 8, mettons dans la dernière forme au lieu de x

les valeurs $4y^2$, $4y+1$ $4y+2$, $4y+3$, alors les formes $22x+1$, 3, 5, 9, 15, se changeront en:

$88y+1$, 3, 5, 9, 15,
$88y+23$, 25, 27, 31, 37,
$88y+45$, 47, 49, 53, 59,
$88y+67$, 69, 71, 75, 81.

Ces nombres doivent donc être tels qu'étant divisés par 8, les restes soient 1 ou 3. En rejettant par conséquent ceux qui ne remplissent point cette condition, il n'en reste que:

$88y+1$, 3, 9,
$88y+25$, 27,
$88y+49$, 59,
$88y+67$, 75, 81,

D'un autre côté la formule $t^2 - 37u^2$ a les diviseurs suivans:

148 $x+1$, 3, 7, 9, 11, 21, 25, 27, 33, 41, 47, 49, 53, 63, 65, 67, 71, 73, 75, 77, 81, 83, 85, 95, 99, 101, 107, 115, 121, 123, 127, 137, 139, 141, 145, 147.

Or tous les nombres au dessous de $\sqrt{A}$, c'est-à-dire au dessous de 1677, et compris dans les formes 148 $x+1$, 3, 7, &c. sont:

3, 5, 7, 11, 41, 47, 53, 67, 71, 73, 83, 101, 107, 127, 137, 139, 149, 151, 157, 173, 181, 197, 211, 223, 229, 233, 263, 269, 271, 293, 307, 317, 349, 359, 367, 373, 379, 397, 419, 433, 443, 491, 509, 521, 571, 593, 599, 601, 613, 617, 619, 641, 659, 673, 677, 691, 719, 733, 739, 743, 751, 761, 773, 787, 811, 821, 823, 839, 863, 877, 887, 929, 937, 941, 953, 971, 983, 1009, 1039, 1061, 1063, 1069, 1103, 1109, 1151, 1163, 1181, 1187, 1193, 1217, 1231, 1237, 1249, 1259, 1279, 1283, 1291, 1307, 1321, 1373, 1381, 1399, 1409, 1427, 1433, 1439, 1447, 1453, 1459, 1471, 1477, 1481, 1483, 1487, 1489, 1543, 1553, 1579, 1601, 1607, 1619, 1621, 1627, 1637, 1669,

En

En excluant de ces 125 nombres ceux qui ne s'accordent pas avec les formes $88y + 1$, 3, 9, 25, 27, 49, 59, 67, 75, 81, cest-à-dire qui, divisés par 88, donnent des restes différens des nombres 1, 3, 9, 25 &c. il en restera encore les 29 suivans:

3, 5, 7, 47, 53, 67, 71, 137, 379, 419, 433, 443, 521, 617, 619, 641, 691, 929, 971, 1193, 1259, 1291, 1307, 1321, 1409, 1433, 1483, 1489.

Mais comme la division du nombre A par ces 29 nombres premiers seroit encore assez pénible, nous aurons recours à la méthode α, pour voir si $\sqrt{A}$, $\sqrt{2A}$ &c. ne peut se décomposer en une ou plusieurs formules $t^2 \pm cu^2$ et différentes des trois que nous venons de considérer. Or après quelques tentatives on trouve que la racine carrée de 7A en nombres entiers $= 4438$, et le reste $= -3 \cdot 5 \cdot 441$. C'est-à-dire on aura $7A = 4438^2 + 15 \cdot 21^2$, $= t^2 - 15u^2$; et comme les diviseurs de cette formule sont de l'une de ces formes: $60x + 1$, 7, 11, 17, 43, 49, 53, 59, nous rejetterons encore des 28 nombres précédens tous ceux qui, divisés par 60, laissent des restes différens de 1, 7, 11, 17, 43, 49, 53 et 59. Par-là les nombres premiers parmi lesquels il faut chercher les diviseurs de A, se trouvent reduits aux 12 suivans:

7, 47, 53, 67, 71, 137, 419, 617, 971, 1259, 1321, 1489,

avec lesquels on essayera donc la division, et si elle ne réussit avec aucun d'eux, on peut être sûr que le nombre proposé est un nombre premier. Or elle réussit ici avec 419. Donc &c.

§. 4. Telle est la méthode de Mr. *Le Gendre*, pour trouver les diviseurs des nombres. Elle réunit plusieurs avan-

avantages qui semblent lui donner la préférence sur toutes les autres connues jusqu'ici. Car d'abord elle est générale, en s'appliquant à tous les nombres, quelques grands qu'ils soient, et en second lieu elle reduit les divisions qui restent à faire, au plus petit nombre possible. Mais en lui rendant cette justice on ne sauroit dissimuler quelques inconvéniens dont elle est encore affectée.

Le plus grand en est sans doute qu'on ne prévoit pas, par quelles valeurs de k il faut multiplier le nombre A, pour pouvoir décomposer le produit en une formule $t^2 \pm au^2$, dont le coëfficient a se trouve dans une des tables dont nous avons fait mention. Dans l'incertitude où l'on en est à cet égard, il ne reste qu'à se servir d'un tâtonnement, duquel on n'est pas toujours bien sûr qu'il réussisse pour toutes les valeurs de k et A, du moins ne connoît-on pas les limites, entre lesquelles ces valeurs de k seront renfermées. Il en est de même de la seconde méthode qui, de plus, exige des calculs assez longs, pour déterminer les Quotiens-complèts. Ce seroit donc un nouveau problème digne de l'attention des Géomètres, de trouver d'une manière directe pour tout nombre donné A, les formules $t^2 \pm au^2$, $t^2 \pm a'u^2$ &c. représentant ses multiples et où les coëfficiens a, a', &c. sont au dessous d'un certain terme.

§. 5. Passons maintenant à quelques remarques, par lesquelles les solutions dont nous venons de donner une idée, peuvent être encore abrégées considérablement. Pour cet effet je supposerai, qu'après avoir employé les méthodes précédentes, il reste encore les nombres premiers, avec lesquels

lesquels il faille essayer de diviser successivement le nombre proposé A. Or ces nombres étant tous impairs, on peut les représenter sous la forme $2\beta + 1$, $2\beta' + 1$, $2\beta'' + 1$ &c. De plus je remarque que le nombre A sera la différence de deux (et seulement de deux) carrés, s'il est premier, et dans le cas contraire il sera la différence d'autant de carrés différens, qu'il y aura de paires de diviseurs différens dont le produit est A. Soit donc $A = p^2 - q^2 = p'^2 - q'^2 = p''^2 - q''^2$ &c. et par conséquent $A = (p+q)(p-q) = (p'+q')(p'-q')$ &c. Et comme un des diviseurs premiers de A est nécessairement plus petit que la racine carrée de ce nombre, soit $p - q$ ce diviseur, que nous ferons $= 2\beta + 1$. Donc A sera $= 2q(2\beta + 1) + 4\beta(\beta + 1) + 1$, et $\frac{A-1}{2} = q(2\beta+1) + 2\beta(\beta+1)$.

Ici il est essentiel de distinguer les deux cas $A = 4m + 1$ et $A = 4m - 1$.

1.) Si $A = 4m + 1$, on aura $\frac{A-1}{2} = 2m = q(2\beta + 1) + 2\beta(2\beta + 1)$, il faut donc que q soit un nombre pair, que nous appellerons $2Q$, par conséquent m sera $= Q(2\beta+1) + \beta(\beta+1)$.

Distinguons encore les deux cas $m = 2n$, et $m = 2n + 1$.

a) Si $m = 2n$, il faut que Q soit un nombre pair $= 2Q'$, donc $n = Q'(2\beta+1) + \frac{\beta(\beta+1)}{2}$,

et $\frac{n - \frac{\beta(\beta+1)}{2}}{2\beta+1}$ sera égal à un nombre entier Q'. Il en est de même des diviseurs $2\beta' + 1$, $2\beta'' + 1$, &c. et $\frac{n+\beta'(\beta'+1)}{2\beta'+1}$, $\frac{n-\beta''(\beta+1)}{2\beta''+1}$ &c. qui doivent être des nombres entiers.

Si

Si n est un nombre pair, et que β, ou $\beta + 1$ soit en même tems divisible par 4, il est clair que $\frac{\frac{n}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{4}}{2\beta+1}$ sera encore un nombre entier, ce qui abrège le calcul considérablement.

Voici donc la solution pour ce cas:

On retranchera successivement de n (ou de $\frac{n}{2}$) la II^de^ ou VIIme colonne des nombres premiers, dont on trouve la table dans le mémoire précédent, savoir ceux de ces nombres qui résultent des diviseurs $2\beta + 1$, $2\beta' + 1$, $2\beta'' + 1$, &c. ce qui donne les restes T, U, V, W, &c. à côté desquels on mettra les diviseurs correspondans $2\beta + 1$, $2\beta' + 1$, &c Or n (ou $\frac{n}{2}$) est beaucoup plus petit que A: à plus forte raison les restes T; U, V, W &c. seront fort au dessous de ce nombre. Par ce moyen la division sera plus facile, les dividendes étant toujours très-petits en comparaison de A, et dans bien des cas on peut se dispenser d'exécuter la division, puisque très-souvent ces restes ou dividendes T, U, V, W, &c. se trouveront dans les tables des nombres premiers et des diviseurs des nombres, où par conséquent un coup d'oeil suffit pour juger de leur divisibilité par les nombres premiers $2\beta + 1$, $2\beta' + 1$ &c.

b) Si m est impair et $= 2n + 1$, Q le sera aussi. Soit donc $Q = 2Q' + 1$; par conséquent nous aurons $2n + 1 = (Q' + 1)(2\beta + 1) + \beta(\beta + 1)$, donc

$$\frac{n - \frac{\beta(\beta+1)}{2} - \beta}{2\beta+1} = Q' = a' \text{ un nombre entier.}$$

Ou si n est un nombre pair, et qu'en même tems β soit

soit de la forme 4γ, $\frac{\frac{n}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{4} - \frac{\beta}{2}}{2\beta+1} =$ à un nombre entier, ou enfin, si n et β sont impairs, et qu'en même tems $\beta + 1 = 4\gamma$,

$$\frac{\frac{n-\beta}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{4}}{2\beta+1} = \text{à un nombre entier.}$$

D'où il est facile de tirer des regles analogues à celle du N°. précédent.

2) Si $A = 4m - 1$, la formule $\frac{A-1}{2} = q(2\beta+1) + 2\beta(\beta+1)$ se change en

$$2m - 1 = q(2\beta+1) + 2\beta(\beta+1),$$

il faut donc que q soit impair et $= 2Q + 1$; ainsi

$$\frac{m-1-\beta-\beta(\beta+1)}{2\beta+1} = Q = \text{à un nombre entier,}$$

ou bien, si $m - 1$ et β sont à la fois pairs ou impairs,

$$\frac{\frac{m-1-\beta}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}}{2\beta+1} = Q' = \text{à un nombre entier.}$$

§. 6. Eclaircissons cette solution par quelques exemples:

I.) Pour premier exemple nous prendrons celui du §. 3. II, où nous avions $A = 2812747$, et où les diviseurs non-exclus, avec lesquels il restoit à essayer la division du nombre A, se sont trouvés être 7, 47, 53, 67, 71, 137, 419, 617, 971, 1259, 1321, 1489. Or $A = 4 \cdot 703187 - 1$, par conséquent $m = 703187$, et $m - 1 = 703186$, et la solution se fera par la formule N°. 2. du §. précédent. Les valeurs de β, β', β'' &c. seront donc: 3, 23, 46, 33, 35, 68, 209, 308, 485, 629, 660, 744, que

nous partagerons en deux classes, selon que ces nombres sont pairs ou impairs, en prenant pour les premiers la formule

$$\frac{\frac{m-1}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}}{2\beta+1} = \text{à un nombre entier,}$$

et pour ceux qui sont impairs, la formule:

$$\frac{m-1-\beta(\beta+1)}{2\beta+1} = \text{à un nombre entier.}$$

De là résultent les deux tables suivantes:

1) Table pour les valeurs paires de β.

$\frac{m-1}{2}$	$\frac{\beta(\beta-1)}{2} + \frac{\beta}{2}$	$\frac{m-1}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2} - \frac{\beta}{2}$	$2\beta+1$
351593	364	351229	53
	2380	349213	137
	47740	303853	617
	218460	133133	1321
	277512	47081	1489

Pour examiner maintenant la divisibilité de la troisième colonne par la quatrième, je me sers des tables des diviseurs des nombres de Mr. *Felkel*, qui sont les plus grandes que j'aie pû me procurer, et qui ont été publiées sous le titre: Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 1000000, contenant les diviseurs des nombres depuis 1 jusqu'à 408000. Or ici aucun nombre de la troisième colonne n'est divisible par son correspondant de la quatrième.

2) Table

2) Table pour les valeurs impaires de β.

$m-1$	$\beta(\beta+1)+\beta$	$m-1-\beta(\beta+1)-\beta$	$2\beta+1$
703186	15	703171	7*
	575	702611	47
	1155	702031	67
	1295	701891	71
	44099	659087	419*
	236195	466991	971
	396899	306287	1259

Parmi ces nombres il n'y a que le dernier 306287 qu'on puisse examiner par le moyen des tables des diviseurs mentionnées. Pour ce qui regarde les autres, qui en surpassent les limites, il ne reste qu'à se servir de la voie de la division, par laquelle on trouve que $703171 : 7 = 100453$, et $659087 : 419 = 1573$. Par conséquent le nombre proposé A est divisible par 7 et 419. En prennant le dernier 419, on a donc $Q = 1573$, ce qui donne $q = 2Q+1 = 3147$, $p = q + 2\beta + 1 = 3147 + 419 = 3566$, $p+q = 6713$ et $A = 2812747 = 6713 \cdot 419 = 7 \cdot 419 \cdot 959$.

On voit qu'avec des tables des diviseurs calculées jusqu'à 1 million on auroit été dispensé de faire la division.

II.) Pour second exemple prenons celui de *Le Gendre* (p. 313. 314 de son ouvrage), où il trouve que, si le nombre $A = 1082401$ a des diviseurs, celui qui est au dessous de $\sqrt{A}$ ne sauroit être qu'un des quatre nombres premiers: 151,

401, 601, 751; et comme nous avons ici $A = 4 . 270600 + 1$, $m = 270600 = 2 . 135300$, et $n = 135300$, il faudra se servir ici des formules N. 1. *a*. où nous ferons encore deux classes de valeurs de β, selon qu'elles sont paires et divisibles par 4, ou impaires. Or $2\beta + 1 = 151, 401, 601, 751$, donc $\beta = 75, 200, 300, 375$.

1) Table pour les valeurs paires de β.

$\frac{n}{2}$	$\frac{\beta(+\beta 1)}{4}$	$\frac{n}{2} - \frac{\beta(\beta + 1)}{4}$	$2\beta + 1$
67650	10050	57600	401
	22575	45075.	601

2) Table pour les valeurs impaires de β.

$\frac{n}{2}$	$\frac{\beta(\beta + 1)}{2}$	$n - \frac{\beta(\beta+1)}{2}$	$2\beta + 1$
135300	2850	132450	151
	70500	64800	751

Pour examiner la divisibilité de ces quatre restes par les diviseurs correspondans, on peut se dispenser de se servir des tables des diviseurs. Car 1) $57600 = 2 . 83 . 100$, et ce nombre, comme on voit, n'est pas divisible par le nombre premier 401. 2) $45075 = 25 . 3 . 601$, ainsi ce nombre est divisible par son correspondant 601. 3) $132450 = 3 . 3 . 10 . 883$, lequel produit ne peut se diviser par 151. Enfin 4) $64800 = 100 . 8 . 81$, donc ce

ce nombre n'est non plus divisible par 751. Nous n'avons par conséquent que le nombre 601 qui divise A. Donc $Q' = 3 \cdot 25 = 75$, $Q = 30$, $q = 600$, $p = q + 2\beta + 1 = 1201$, $p + q = 1801$ et $A = 1082401 = 601 \cdot 1801$.

§. 7. Les moyens que nous venons de proposer pour faciliter la recherche des diviseurs des nombres, ne sont pas les seuls qu'on peut employer. Il en est d'un autre genre et qui se rapportent immédiatement à la division même. Car, comme en appliquant la méthode précédente à des nombres très-grands, il reste toujours des divisions à faire, il faut surtout songer à abreger celles-ci. Pour cet effet je proposerai, en forme d'exemples, une méthode particulière d'examiner la divisibilité d'un nombre donné par un ou plusieurs autres nombres, qui pourra être de quelque utilité, et qui, si elle n'est pas aussi courte que quelques autres applicables seulement aux nombres 3, 7, 11, 13, &c. a l'avantage d'être générale, en s'étendant indifféremment à tous les nombres, quelques grands qu'ils soient, et même à des systèmes entiers de nombres.

§. 8. *I. Exemple.* Examiner si le nombre 372239 est divisible par 53.

Comme il ne faut qu'un coup d'oeil pour déterminer le premier et le dernier chifre du quotient, en cas que la division soit possible, je les supposerai connus. Le premier est 7 et le dernier ne sauroit être qu' un nombre qui multiplié par dernier chifre du diviseur, c'est-à-dire par 3, donne un produit dont le dernier chifre est 9; par con-

conséquent ce nombre sera 3. De plus, on connoît, le nombre des chifres du quotient, que nous désignerons par $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,3$, où α, comme nous venons de voir, est $= 7$. Cela posé, on procédera de la manière suivante:

Quotient		α	β	γ	δ	3
Diviseur					5	3
		3α	3β	3γ	3δ	9
				1	5	
	5α	5β	5γ	5δ		

1) On multipliera d'abord le quotient par le diviseur, en observant de séparer, comme il faut, les dixaines, centaines &c., après quoi on comparera le produit et le nombre donné 3729239 terme à terme, en faisant le raisonnement suivant:

2) Le nombre des dixaines du nombre proposé est 3. Il faut donc que $3\delta + 5$ soit un nombre dont le dernier chifre, qui marque les dixaines, soit également 3; par conséquent 3δ se terminera en 8, (c'est à dire en 13 moins 5), et par une table de multiplication on s'assûre que δ ne sauroit être que 6.

3) S $\delta = 6$, $3\delta + 5$ sera $= 23$, et le 2 sera compté parmi les centaines. Il faut donc que $3\gamma + 5\delta + 1 + 2$, c'est-à-dire que $3\gamma + 33$ soit un nombre dont le dernier chifre est $= 2$. Par conséquent 3γ se terminera en 9, donc $\gamma = 3$, et $3\gamma + 33 = 42$.

4) En

4) En comptant 4 dans la classe suivante, on trouvera que $3\beta + 19$ se terminera en 9, c'est-à-dire 3β en 0 donc $\beta = 0$, et $3\beta + 19 = 19$.

5) Par un raisonnement semblable on trouve que $3\alpha + 1$ doit se terminer en 2, c'est-à-dire 3α en 1, donc $\alpha = 7$. Et comme ce nombre s' accorde avec celui que nous avons déterminé dès le commencement par le premier coup d'oeil, la division pourra se faire sans reste, et le quotient sera $\alpha\beta\gamma\delta 3$, ou 70363.

II *Exemple.* On demande si 5947819 est divisible par 137.

Après avoir déterminé le premier et le dernier chifre du quotient, 4 et 7, ainsi que le nombre des chifres, on fera la disposition suivante:

Quotient		α	β	γ	δ	7
Diviseur				1	3	7
					4	9
		7α	7β	7γ	7δ	
				2	1	
	3α	3β	3γ	3δ		
α	β	γ	δ	7		

Pour accorder maintenant le produit avec le nombre donné 5947819, il faut donc

1) que $7\delta + 5$ se termine en 1, c'est-à-dire 7δ en 6, par conséquent $\delta = 8$. Donc $7\delta + 5 = 61$, et le 6 sera compté dans le classe suivante:

2) 7γ

2) $7\gamma + 3q$ se terminera en 8; ainsi 7γ en 9, donc $\gamma = 7$, et $7\gamma + 3q = 85$, où les 8 seront mis dans la classe des mille &c Procédant de même avec les classes suivantes, on trouvera $\beta = 0$ et $\alpha =$; et comme ce dernier nombre ne s'accorde pas avec la valeur $\alpha = 4$, trouvée dès le commencement, le nombre donné ne sera pas divisible sans reste par 137.

L'utilité de cette méthode paroîtra encore d'avantage, si on l'applique à des diviseurs dont les deux, trois &c. derniers chiffres sont égaux. En voici un exemple:

Parmi les 12 nombres premiers qui peuvent seuls être diviseurs du nombre 2812747 (§. 3. II.), se trouvent les deux nombres 71 et 971, qui, se terminant l'un et l'autre en 71, peuvent être examinés à la fois de la manière suivante:

III. Exemple.

		(3) α	(2) β	γ	δ	7
				9	7	1
		α	β	γ	δ	7
				4	9	
	7α	7β	7γ	7δ		
			6	3		
9α	9β	9γ	9δ			

Les trois premieres lignes du produit sont pour le diviseur 71, et le tout ensemble pour 971, où il est à remarquer que le premier diviseur 71 aura un quotient composé de 5 chiffres, dont le premier $\alpha = 3$, tandis que le quotient qui répond à 971, n'en a que 4, dont le premier

premier $\beta = 2$, ce que nous avons exprimé par les notes mises audessus de ces deux chiffres.

Calcul pour le diviseur 71.

1) $\delta + q$ se termine en 4, donc $\delta = 5$. Par conséquent $\delta + q = 14$, où l'on prendra l'unité pour la classe suivante:
2) $\gamma + 40$ se termine en 7, donc $\gamma = 7$.
3) $\beta + 53$ se termine en 2, donc $\beta = 9$.
4) $\alpha + 69$ se termine en 1, ce qui donne $\alpha = 2$. Mais comme cette valeur ne s'accorde pas avec la premiere $\alpha = 3$, il s'en suit que 71 n'est pas diviseur du nombre proposé.

Calcul pour le diviseur 971.

1) Ici nous avons également $\delta = 5$.
2) $\gamma + 43$ doit se terminer en 7, donc $\gamma = 4$.
3) $\beta + 83$ doit se terminer en 2, et pour cela il faut que β soit $= 9$. Mais comme cette valeur est différente de $\beta = 3$ déterminée au commencement, on voit que 971 n'est non plus diviseur du nombre 2812747.

Je finis ces remarques en observant que pour peu qu'on se soit rendu familier le raisonnement dont nous nous sommes servis pour examiner la divisibilité d'un nombre par un autre, on trouvera cette méthode préférable à la division. Mais comme elle est fondée sur l'hypothese que la division se fasse sans reste, on ne peut en faire usage dans les cas où un nombre n'est pas divisible par un autre et où l'on a besoin d'en savoir le reste.

SERIERUM PRINCIPALIUM,

quae Sinus angulorum multiplorum exprimunt Demonstratio elementaris.

Auctore *KRAFFT.*

Conventui exhibita d. 9 Jun. 1802.

§. 1.

Celebre atque Actis Academiae nostrae propemodum proprium argumentum est de seriebus Sinus angulorum multiplorum exprimentibus, ad quod omni numero absolvendum vix quidquam desiderari posse videtur, nisi ut istae series atque inter istas inprimis eae, quae concinna simplicitate sua primum sibi prae ceteris locum vindicant et ad omnem Geometrarum usum, quod attinet ad multiplicationem angulorum, sufficiunt, planiore demonstratione muniantur, ab infiniti considerationibus et a quantitatibus praesertim imaginariis libera, utpote ab ejusmodi disquisitionum genere nimium dissidentibus. Utilis argumenti, cetera elaboratissimi, unam hanc delere mendam tentanti obtulit se mihi istas series demonstrandi ratio, quae jure elementaris vocari posse videtur, cum neque inductioni vim justo majorem indulgeat neque etiam infiniti aut quantitatum imaginariarum calculo utatur, sed ab ipsis sinuum et angulorum illis respondentium reciprocis relationibus profecta ad ipsas illas series per passim cognita principia analytica perducat. Series, de quibus hic mihi sermo est et quas Ill. *Eulerus* in Introductione sua ad Analysin Infinitorum primus protulit, sunt sequentes:

Sin

$$\text{Sin } m\Phi = m.\sin\Phi - \frac{m.m^2-1}{1.2.3}\sin\Phi^3 + \frac{m.m^2-1.m^2-9}{1.2.3.4.5}\sin\Phi^5$$
$$- \frac{m.m^2-1.m^2-9.m^2-25}{1.2.3.4.5.6.7}\sin\Phi^7 + \&c.$$

$$\text{et } \sin m\Phi = \cos\Phi\left[m\sin\Phi - \frac{m.m^2-4}{1.2.3}\sin\Phi^3 + \frac{m.m^2-4.m^2-16}{1.2.3.4.5}\sin\Phi^5 \right.$$
$$\left. - \frac{m.m^2-4.m^2-16.m^2-36}{1.2.3.4.5.6.7}\sin\Phi^7 + \&c. \right]$$

quarum illa pro m numero impare quocunque, haec pro pari, abrumpit; neutra autem demonstratione stricte sic dicta hactenus munita est.

Prioris harum serierum originem ita animo praecepi, ut praesumerem, illam obtineri, si, sinu anguli multipli per formulas cognitas in seriem secundum potestates anguli multipli progredientem converso, separatisque potestatibus multipli ab angulo simplo, pro potestatibus anguli simpli substituantur valores earum per formulas haud minus cognitas dati, ita, ut cardo demonstrationis in binis aequationibus solide demonstratis, quarum una sinum arcus per arcum, altera arcum per sinum arcus exprimit, verti et a reciprocis relationibus coëfficientium terminorum utriusque hujus seriei repeti debere videretur. Constat, has series ita se habere:

$$\text{Sin } x = x - A.x^3 + B.x^5 - C.x^7 + \&c.$$
$$\text{et } x = \sin x + \alpha \sin x^3 + \beta \sin x^5 + \gamma \sin x^7 + \&c.$$

existente

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \qquad \beta = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \qquad \gamma = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$D = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \qquad \delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$$

&c. &c.

Relationum notabiliorum, quae inter binarum harum serierum coëfficientes intercedunt, non nisi eas, quae demonstrationis nobis propositae basin constituunt, lemmatum sub forma hic praemitti necesse est.

Lemma I.

§. 2. Si in ordine coëfficientium seriei

$$\sin x = x - Ax^3 + Bx^5 - Cx^7 + \text{&c.}$$

vocetur A coëfficiens primus, B secundus, C tertius &c. atque coëfficiens ordine $n^{tesimus}$ symbolismo $[Zn]$ designetur. ita, ut sit $[Z0] = 1$; $[Z1] = A$; $[Z2] = B$ &c.; ex ipsa seriei hujus demonstratione in principiis analyticis tradi solita patet, esse $[Zn] = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (2n+1)}$. Denotante igitur r numerum integrum positivum quemcunque, positoque $n + r$ loco n, erit $[Z.n+r] =$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots (2n+1)(2n+2) \ldots\ldots (2n+2r+1)}.$$

Quare

Quare inter binos hujus seriei coëfficientes intervallo quocunque $= r$ inter se remotos talis obtinet relatio, ut sit

$$\frac{[Z.n]}{[Z.n+r]} = (2n+2)(2n+3)(2n+4)\ldots(2n+2r+1).$$

§. 3. Lemmati huic sequentia subjungimus

Corollaria:

1) Si compendii caussa ponatur

$$(2n+2)(2n+3) = P \quad | \quad (2n+8)(2n+9) = S$$
$$(2n+4)(2n+5) = Q \quad | \quad (2n+10)(2n+11) = T$$
$$(2n+6)(2n+7) = R \quad | \quad (2n+12)(2n+13) = U \text{ &c.}$$

quarum expressionum quaelibet, posito $n+1$ loco n, abit in proximam: patet,

posito	esse	hincque posito $n+1$ loco n		
$r=1$	$\frac{[Z.n]}{[Z.n+1]} = P;$	$\frac{[Z.n+1]}{[Z.n+2]} = Q;$	$\frac{[Z.n+2]}{[Z.n+3]} = R;$	&c.
$r=2$	$\frac{[Z.n]}{[Z.n+2]} = P.Q;$	$\frac{[Z.n+1]}{[Z.n+3]} = Q.R;$	$\frac{[Z.n+2]}{[Z.n+4]} = R.S;$	&c.
$r=3$	$\frac{[Z.n]}{[Z.n+3]} = P.Q.R;$	$\frac{[Z.n+1]}{[Z.n+4]} = Q.R.S;$	$\frac{[Z.n+2]}{[Z.n+5]} = R.S.T.$	&c.
$r=4$	$\frac{[Z.n]}{[Z.n+4]} = P.Q.R.S;$	$\frac{[Z.n+1]}{[Z.n+5]} = Q.R.S.T;$		&c.

2) Retentis iisdem valoribus P, Q, R, S &c., facile demonstratur, esse

$$(2n+2)Q-(2n+1).P = (2n+2)(10.(n+1)+7)$$
$$(2n+4).R-(2n+3).Q = (2n+4)(10\ (n+2)+7)$$
$$(2n+6).S-(2n+5)\ R = (2n+6)(10\ (n+3)+7)$$
$$(2n+8)T-(2n+7)\ S = (2n+8)(10.(n+5)+7)$$

&c.

et

et simili modo, esse

$$(2n+3).Q-(2n+1).P=6(2n+3)^2$$
$$(2n+5).R-(2n+3).Q=6(2n+5)^2$$
$$(2n+7).S-(2n+5).R=6(2n+7)^2$$
$$(2n+9).T-(2n+7).S=6(2n+9)^2 \text{ &c.}$$

Lemma II.

§. 4. Si in ordine coëfficientium seriei $x = \sin x + \alpha \sin x^3 + \beta \sin x^5 +$ &c. vocetur α coëfficiens primus, β secundus, γ tertius &c. et coëfficiens ordine $n^{tesimus}$ symbolo $[\Omega n]$ designetur, ita, ut sit $[\Omega 0] = 1$; $[\Omega 1] = \alpha$; $[\Omega 2] = \beta$ &c. ex ipsa demonstratione hujus seriei in principiis analyticis tradi solita patet, esse $(2n+1)[\Omega n] = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6.....(2n)}$. Denotante igitur r numerum integrum positivum quemcunque, positoque $n+r$ loco n, erit

$$(2n+2r+1)[\Omega.n+r] = \frac{1.3.5....(2n-1)(2n+1)(2n+3)....(2n+2r-1)}{2.4.6.....(2n)\ (2n+2)(2n+4)....(2n+2r)}.$$

Quare inter binos hujus seriei coëfficientes intervallo quocunque $= r$ inter se remotos talis obtinet relatio, ut sit

$$\frac{(2n+1)[\Omega.n]}{(2n+2r+1)[\Omega.n+r]} = \frac{(2n+2)(2n+4)....(2n+2r)}{(2n+1)(2n+3)...(2n+2r-1)}.$$

§. 5. Lemmati huic sequentia subjungimus

Corollaria:

1) Combinando utrumque Lemma colligitur

$$\frac{[Z.n]}{[Z.n+r]}.\frac{[\Omega.n+r]}{[\Omega.n]} = (2n+1)^2(2n+3)^2(2n+4)^2(2n+5)^2....(2n+2r-1)^2.$$

Ita

Ita, exempli caussa, posito $r = 1$, et $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; &c.

fit $\frac{\alpha}{A} = 1^2$; $\frac{A \cdot \beta}{B \cdot \alpha} = 3^2$; $\frac{B \cdot \gamma}{C \cdot \beta} = 5^2$; $\frac{C \cdot \delta}{D \cdot \gamma} = 7^2$ &c.

Similique modo, posito $r = 2$ et $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; &c.

$$\frac{\beta}{B} = 1^2 \cdot 3^2 : \frac{A \cdot \gamma}{C \cdot \alpha} = 3^2 \cdot 5^2; \quad \frac{B \cdot \delta}{D \cdot \beta} = 5^2 \cdot 7^2; \quad \frac{C \cdot \varepsilon}{E \cdot \gamma} = 7^2 \cdot 9^2; \text{ &c.}$$

2) Generaliter, posito $r = 1$, habetur

$$(2n+1)^2 = P \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+1}]}{[\Omega n]} \qquad (2n+7)^2 = S \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+4}]}{[\Omega \cdot \overline{n+3}]}$$

$$(2n+3)^2 = Q \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+2}]}{[\Omega \cdot \overline{n+1}]} \qquad (2n+9)^2 = T \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+5}]}{[\Omega \cdot \overline{n+4}]}$$

$$(2n+5)^2 = R \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+3}]}{[\Omega \cdot \overline{n+2}]}$$

Lemma III.

§. 6. Si serie $x = \sin x + \alpha \sin x^3 + \beta \sin x^5 + \gamma \sin x^7 + \delta \sin x^9 +$ &c. ad potestatem exponentis $= \lambda$ elevata, tali symbolismo utamur, ut sit $x^\lambda = \sin x^\lambda + [\alpha\lambda] \cdot \sin x^{\lambda+2} + [\beta\lambda] \cdot \sin x^{\lambda+4} + [\gamma\lambda] \cdot \sin x^{\lambda+6} + [\delta\lambda] \cdot \sin x^{\lambda+8} +$ &c; constat, fore,

1. $[\alpha\lambda] = \lambda \cdot \alpha$.
2. $[\beta\lambda] = (\lambda - 1)[\alpha\lambda] \cdot \alpha + 2\lambda \cdot \beta$.
3. $[\gamma\lambda] = (\lambda - 2)[\beta\lambda] \cdot \alpha + (2\lambda - 1)[\alpha\lambda] \cdot \beta + 3\lambda\gamma$.
4. $[\delta\lambda] = (\lambda - 3)[\gamma\lambda] \cdot \alpha + (2\lambda - 2)[\beta\lambda] \cdot \beta + (3\lambda - 1)[\alpha\lambda] \cdot \gamma + 4\lambda \cdot \delta$

&c.

quae

quae expressiones manifesta lege progrediuntur et ex principiis analyticis facile demonstrantur.

Theorema.

§. 7. Introducto in calculum symbolismo lemmatis praecedentis, et retentis valoribus (§. 3.), P, Q, R, S &c. habentur sequentes aequalitates:

$$Q.[\alpha.2\overline{n+3}] - P.[\alpha.2\overline{n+1}] = (2n+3)^2.$$
$$R.[\beta.2\overline{n+3}] - P.[\beta.2\overline{n+1}] = (2n+5)^2.[\alpha.2\overline{n+3}]$$
$$S.[\gamma.2\overline{n+3}] - P.[\gamma.2\overline{n+1}] = (2n+7)^2.[\beta.2\overline{n+3}]$$
$$T.[\delta.2\overline{n+3}] - P.[\delta.2\overline{n+1}] = (2n+9)^2.[\gamma.2\overline{n+3}]$$

&c.

quae lege adeo regulari progrediuntur, ut quousque libuerit, continuari queant.

Demonstratio.

1) Cum posito $\lambda = 2n+1$; sit $[\alpha.2\overline{n+1}] = (2n+1).\alpha.$ (§. 6.) et, posito $n+1$ loco n, hinc sit $[\alpha.2\overline{n+3}] = (2n+3).\alpha$; erit $Q[\alpha.2\overline{n+3}] - P[\alpha.2\overline{n+1}] = ((2n+3).Q - (2n+1).P).\alpha$. At ex coroll. 2do §. 3^{tii} constat, esse $(2n+3).Q - (2n+1)P = 6.(2n+3)^2$; quo valore subtituto, ob $\alpha = \frac{1}{2.3}$, colligitur $Q[\alpha.2\overline{n+3}] - P[\alpha.2\overline{n+1}] = (2n+3)^2$; quae est prima aequalitas.

2) Cum posito $\lambda = 2n+1$; sit ex §. 6. $[\beta.2\overline{n+1}] = n[\alpha.2\overline{n+1}].\alpha + (2n+1).\beta = n(2n+1).\alpha^2 + (2n+1)\beta = (2n+1)\alpha^2(n+\frac{\beta}{\alpha^2})$, hincque $[\beta.2\overline{n+3}] = (2n+3).\alpha^2.(n+1+\frac{\beta}{\alpha^2})$; erit $R[\beta.2\overline{n+3}] - P[\beta.2\overline{n+1}]$

=

$(2n+3)\,.\,\alpha^2\,[R+(R-\frac{2n+1}{2n+3}\,.\,P)(n+\frac{\beta}{\alpha^2})]$. At ob $\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{3^2}{2\,.\,5}$, hincque $n+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{10(n+2)+7}{10}$, est $(R-\frac{2n+1}{2n+3}\,.\,P)(n+\frac{\beta}{\alpha})=(2n+4)\,(10\,(n+2)+7)$. Constat autem ex corollario 2. §. 3, esse $(2n+4)\,(10\,(n+2)+7)=(2n+4)\,.\,R-(2n+3)\,.\,Q$; quo substituto fit $R\,[\beta\,.\,\overline{2n+3}]-P\,.\,[\beta\,.\,\overline{2n+1}]=(2n+3)\,.\,\alpha^2\,((2n+5)\,.\,R-(2n+3)\,.\,Q)$. At ex eodem corollario est $(2n+5)\,.\,R-(2n+3)\,.\,Q=6\,.\,(2n+5)^2$; quo substituto fit $R\,[\beta\,.\,\overline{2n+3}]-P[\beta\,.\,\overline{2n+1}]=(2n+3)\,.\,\alpha^2\,6\,.\,(2n+5)^2=(2n+5)^2\,.\,(2n+3)\,.\,\alpha=(2n+5)^2\,.\,[\alpha\,.\,\overline{2n+3}]$, quae est secunda aequalitas.

Simili ratione, quanquam calculo subinde prolixiore, etiam reliquae aequalitates demonstrantur.

§. 8. Theoremati huic sequentia subjungimus

Corollaria:

1) Cum (§. 3.) sit $P=\frac{[Z\,.\,n]}{[Z\,\overline{n+1}]}$; $Q=\frac{[Z\,.\,\overline{n+1}]}{[Z\,.\,\overline{n+2}]}$ et (§. 5.) sit $(2n+3)^2=Q\,.\,\frac{[\Omega\,.\,\overline{n+2}]}{[\Omega\,.\,\overline{n+1}]}$; substitutis his valoribus prima aequalitas Theorematis praecedentis abit in sequentem:

$$\frac{[Z\,\overline{n+1}]}{[Z\,.\,\overline{n+2}]}\,.\,[\alpha\,.\,\overline{2n+3}]-\frac{[Z\,.\,n]}{[Z\,.\,\overline{n+1}]}\,.\,[\alpha\,.\,\overline{2n+1}]=\frac{[Z\,.\,\overline{n+1}]}{[Z\,.\,\overline{n+2}]}\,.\,\frac{[\Omega\,.\,\overline{n+2}]}{[\Omega\,.\,\overline{n+1}]}.$$

unde, si	colligitur, esse
$n = 0$	$\frac{A}{B} \cdot [\alpha \cdot 3] - \frac{1}{A} \cdot [\alpha \cdot 1] = \frac{A \cdot \beta}{B \cdot \alpha}$.
$n = 1$	$\frac{B}{C} \cdot [\alpha \cdot 5] - \frac{A}{B} \cdot [\alpha \cdot 3] = \frac{B \cdot \gamma}{C \cdot \beta}$.
$n = 2$	$\frac{C}{D} \cdot [\alpha \cdot 7] - \frac{B}{C} \cdot [\alpha \cdot 5] = \frac{C \cdot \delta}{D \cdot \gamma}$.
$n = 3$	$\frac{D}{E} \cdot [\alpha \cdot 9] - \frac{C}{D} \cdot [\alpha \cdot 7] = \frac{D \cdot \varepsilon}{E \cdot \delta}$

&c.

2) Cum (§. 3.) sit $P.Q = \frac{[Z.n]}{[Z.n+2]}$; $QR = \frac{[Z.n+1]}{[Z.n+3]}$ et (§. 5.) sit $(2n+5)^2 = R.\frac{[\Omega.n+3]}{[\Omega.n+2]}$; hineque $P = \frac{[Z.n]}{[Z.n+2].Q}$, $R = \frac{[Z.n+1]}{[Z.n+3].Q}$ et $(2n+5)^2 = \frac{[Z.n+1]}{[Z.n+3].Q} \cdot \frac{[\Omega.n+3]}{[\Omega.n+2]}$, substitutis his valoribus secunda aequalitas abit in sequentem:

$$\frac{[Z.n+1]}{[Z.n+3]} \cdot [\beta \cdot 2n+3] - \frac{[Z.n]}{[Z.n+2]} [\beta \cdot 2n+1] = \frac{[Z.n+1]}{[Z.n+3]} \cdot \frac{[\Omega.n+3]}{[\Omega.n+2]} [\alpha \cdot 2n+3]$$

unde, si	colligitur, esse
$n = 0$	$\frac{A}{C}[\beta.3] - \frac{1}{B}.[\beta.1] = \frac{A.\gamma}{C.\beta}[\alpha.3]$
$n = 1$	$\frac{B}{D}[\beta.5] - \frac{A}{C}.[\beta.3] = \frac{B.\delta}{D.\gamma}[\alpha.5]$

$n = 2$

$$n = 2 \;\Big|\; \frac{C}{E}[\beta . 7] - \frac{B}{D}[\beta . 5] = \frac{C . \varepsilon}{E . \delta}[\alpha . 7]$$

$$n = 3 \;\Big|\; \frac{D}{F}[\beta . 9] - \frac{C}{E}[\beta . 7] = \frac{D . \zeta}{F . \varepsilon}[\alpha . 9]$$

&c.

3) Cum (§. 3.) sit $P . Q . R = \frac{[Z . n]}{[Z . \overline{n+3}]}$; $Q . R . S = \frac{[Z . \overline{n+1}]}{[Z . \overline{n+4}]}$ et (§. 5.) sit $(2n+7)^* = S . \frac{[\Omega . \overline{n+4}]}{[\Omega . \overline{n+3}]}$; hincque $P = \frac{[Z . n]}{[Z . \overline{n+3}] . Q . R}$; $S = \frac{[Z . \overline{n+1}]}{[Z . \overline{n+4}] . Q . R}$ et $(2n+7)^* = \frac{[Z . \overline{n+1}]}{[Z . \overline{n+4}] . Q . R} . \frac{[\Omega . \overline{n+4}]}{[\Omega . \overline{n+3}]}$; substitutis his valoribus tertia aequalitas abit in sequentem:

$$\frac{[Z . \overline{n+1}]}{[Z . \overline{n+4}]}[\gamma . \overline{2n+3}] - \frac{[Z . n]}{[Z . \overline{n+3}]} . [\gamma . \overline{2n+1}] = \frac{[Z . \overline{n+1}]}{[Z . \overline{n+4}]} . \frac{[\Omega . \overline{n+4}]}{[\Omega . \overline{n+3}]} . [\beta . \overline{2n+3}].$$

unde, si colligitur, esse

$$n = 0 \;\Big|\; \frac{A}{D}[\gamma . 3] - \frac{1}{C}[\gamma . 1] = \frac{A . \delta}{D . \gamma}[\beta . 3]$$

$$n = 1 \;\Big|\; \frac{B}{E}[\gamma . 5] - \frac{A}{D}[\gamma . 3] = \frac{B . \varepsilon}{E . \delta}[\beta . 5]$$

$$n = 2 \;\Big|\; \frac{C}{F}[\gamma . 7] - \frac{B}{E}[\gamma . 5] = \frac{C . \zeta}{F . \varepsilon}[\beta . 7]$$

&c.

4) Cum (§. 3.) sit $P \cdot Q \cdot R \cdot S = \frac{[Z \cdot n]}{[Z \cdot n+4]}$; $Q \cdot R \cdot S \cdot T = \frac{[Z \cdot \overline{n+4}]}{[Z \cdot \overline{n+5}]}$ et (§. 5.) sit $(2n+9)^2 = T \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+5}]}{[\Omega \cdot \overline{n+4}]}$; hincque $P = \frac{[Z \cdot n]}{[Z \cdot \overline{n+4}] \cdot Q \cdot R \cdot S}$;

$$T = \frac{[Z \cdot \overline{n+1}]}{[Z \cdot \overline{n+5}] \cdot Q \cdot R \cdot S} \text{ et } (2n+9)^2 = \frac{[Z \cdot \overline{n+1}]}{[Z \cdot \overline{2n+5}] \cdot Q \cdot R \cdot S} \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+5}]}{[\Omega \cdot \overline{n+4}]};$$

substitutis his valoribus quarta aequalitas abit in sequentem:

$$\frac{[Z \cdot \overline{n+1}]}{[Z \cdot \overline{n+5}]} \cdot [\delta \cdot \overline{2n+3}] - \frac{[Z \cdot n]}{[Z \cdot \overline{n+4}]} \cdot [\delta \cdot \overline{2n+1}] = \frac{[Z \cdot \overline{n+1}]}{[Z \cdot \overline{n+5}]} \cdot \frac{[\Omega \cdot \overline{n+5}]}{[\Omega \cdot \overline{n+4}]} [\gamma \cdot \overline{2n+3}],$$

unde, si colligitur, esse

$$n = 0 \left| \frac{A}{E}[\delta \cdot 3] - \frac{1}{D}[\delta \cdot 1] = \frac{A \cdot \varepsilon}{E \cdot \delta} \cdot [\gamma \cdot 3] \right.$$

$$n = 1 \left| \frac{B}{F}[\delta \cdot 5] - \frac{A}{E}[\delta \cdot 3] = \frac{B \cdot \zeta}{F \cdot \varepsilon} \cdot [\gamma \cdot 5] \right.$$

$$n = 2 \left| \frac{C}{G}[\delta \cdot 7] - \frac{B}{F}[\delta \cdot 5] = \frac{C \cdot \eta}{G \cdot \zeta} \cdot [\gamma \cdot 7] \right.$$

&c.

Hisce circa relationes coëfficientium binarum serierum (§§. 3 et 4.) et coefficientium potestatis cujuscunque seriei (§. 6.) praenotatis, sequens ex doctrina functionum algebraicarum subjungendum est

Lemma

Lemma IV.

§. 9. Datis binis functionibus, una inter X et x, altera inter x et y,

$$X = x - \mathfrak{A}.x^3 + \mathfrak{B}.x^5 - \mathfrak{C}.x^7 + \mathfrak{D}.x^9 - \&c.$$

et $$x = y + \alpha.y^3 + \beta.y^5 + \gamma.y^7 + \delta.y^9 + \&c.$$

si quaeratur tertia functio inter X et y ex binis datis resultans, eaque ponatur

$$X = y + M.y^3 + N.y^5 + P.y^7 + Q.y^9 + \&c.$$

facile demonstratur, admisso symbolismo (§. 6.), fore

$$M = \alpha - \mathfrak{A}.$$
$$N = \beta - \mathfrak{A}[\alpha.3] + \mathfrak{B}.$$
$$P = \gamma - \mathfrak{A}[\beta.3] + \mathfrak{B}[\alpha.5] - \mathfrak{C}.$$
$$Q = \delta - \mathfrak{A}[\gamma.3] + \mathfrak{B}[\beta.5] - \mathfrak{C}[\alpha.7] + \mathfrak{D}.$$
$$R = \varepsilon - \mathfrak{A}[\delta.3] + \mathfrak{B}[\gamma.5] - \mathfrak{C}[\beta.7] + \mathfrak{D}[\alpha.9] - \mathfrak{E}.$$
$$\&c.$$

§. 10. Hisce praemissis, propositum nobis sit sequens

Problema.

Sinum anguli multipli per seriem secundum potestates Sinus anguli simpli progredientem exprimere.

Solutio.

Sit angulus $= \Phi$, ejusque multiplum $= m.\Phi$; notum est, esse (§. 1), posito $x = m\Phi$,

$$\frac{\sin.m\Phi}{m} = \Phi - A.m^2\Phi^3 + B.m^4.\Phi^5 - C.m^6.\Phi^7 + \&c.$$

et $$\Phi = \sin.\Phi + \alpha.\sin.\Phi^3 + \beta.\sin.\Phi^5 + \gamma.\sin.\Phi^7 + \&c.$$

Ponatur

Ponatur series quaesita

$$\frac{\sin.m\Phi}{m} = \sin.\Phi + M.\sin.\Phi^3 + N.\sin.\Phi^5 + P.\sin.\Phi^7 + \&c.$$

ubi coëfficientes M, N, P &c. sunt determinandi.

Lemmate praecedente (§. 9.) ad hasce series applicato, habetur

$$X = \frac{\sin.m\Phi}{m}; x = \Phi; y = \sin.\Phi, \text{ et}$$

$$\mathfrak{A} = A.m^2; \mathfrak{B} = B.m^4; \mathfrak{C} = C.m^6 \&c.$$

quibus valoribus substitutis, colligitur, fore

$$M = \alpha - A.m^2.$$

$$N = \beta - A.m^2\,[\alpha.3] + B.m^4.$$

$$P = \gamma - A.m^2\,[\beta.3] + B.m^4\,[\alpha.5] - C.m^6.$$

$$Q = \delta - A.m^2\,[\gamma.3] + B.m^4\,[\beta.5] - C.m^6\,[\alpha.7] + D.m^8.$$

&c.

quae itaque generalissimae sunt coëfficientium M, N, P &c. expressiones et lege adeo manifesta progrediuntur, ut quousque libuerit, eas continuare liceat.

Hos igitur valores ulterius evolvi oportet, quem in finem eos ita repraesento:

$$M = -A\left(m^2 - \frac{\alpha}{A}\right)$$

$$N = +B\left(m^4 - \frac{A}{B}[\alpha.3].m^2 + \frac{\beta}{B}\right).$$

P =

$$P = -C\left(m^6 - \frac{B}{C}[\alpha.5].m^4 + \frac{A}{C}[\beta.3]\,m^2 - \frac{\gamma}{C}\right.$$

$$Q = +D\left(m^8 - \frac{C}{D}[\alpha.7].m^6 + \frac{B}{D}[\beta.5].m^4 - \frac{A}{D}[\gamma.3].m^2 + \frac{\delta}{D}\right)$$

$$R = -E\left(m^{10} - \frac{D}{E}[\alpha.9].m^8 + \frac{C}{E}[\beta.7].m^6 - \frac{B}{E}.[\gamma.5].m^4\right.$$

$$\left. + \frac{A}{E}[\delta.3].m^2 - \frac{\varepsilon}{E}\right) \text{ &c.}$$

Cum igitur per Corollaria §. 8, ob $[\alpha.1]=\alpha$; $[\beta.1]=\beta$; $[\gamma.1]=\gamma$, &c.; sit $\frac{A}{B}[\alpha.3] = \frac{\alpha}{A} + \frac{A.\beta}{B.\alpha}$; erit, substituto hoc valore,

$$N = B\left(m^2 - \frac{\alpha}{A}\right)\left(m^2 - \frac{A.\beta}{B.\alpha}\right) = -\frac{B}{A}.M\left(m^2 - \frac{A.\beta}{B.\alpha}\right).$$

Cum porro sit

$$\frac{B}{C}[\alpha.5] = \frac{A}{B}[\alpha.3] + \frac{B.\gamma}{C.\beta} \text{ et } \frac{A}{C}[\beta.3] = \frac{A.\gamma}{C.\beta}[\alpha.3] + \frac{\beta}{B};$$

erit, substitutis his valoribus,

$$P = -C\left(m^4 - \frac{A}{B}[\alpha.3].m^2 + \frac{\beta}{A}\right)\left(m^2 - \frac{B.\gamma}{C.\beta}\right) = -\frac{C}{B}.N.\left(m^2 - \frac{B.\gamma}{C.\beta}\right).$$

Simili modo, cum sit

$$\frac{C}{D}[\alpha.7] = \frac{B}{C}[\alpha.5] + \frac{C.\delta}{D.\gamma};\quad \frac{B}{D}[\beta.5] = \frac{B.\delta}{D.\gamma}[\alpha.5] + \frac{A}{C}[\beta.3]$$

$$\text{et } \frac{A}{D}[\gamma.3] = \frac{A.\delta}{D.\gamma}[\beta.3] + \frac{\gamma}{C};$$

erit, substitutis his valoribus,

$$Q = +D.\left(m^6 - \frac{B}{C}[\alpha.5].m^4 + \frac{A}{C}[\beta.3].m^2 - \frac{\gamma}{C}\right)\left(m^2 - \frac{C.\delta}{D.\gamma}\right)$$

$$= -\frac{D}{C}.P.\left(m^2 - \frac{C.\delta}{D.\gamma}\right).$$

Atque

Atque simili calculo quoque reperitur

$$R = -\frac{E}{D} \cdot Q \left(m^2 - \frac{D \cdot \varepsilon}{E \cdot \delta}\right)$$

&c.

qui igitur valores

$$M = -A \left(m^2 - \frac{\alpha}{A}\right)$$

$$N = -\frac{B}{A} \cdot M \left(m^2 - \frac{A \cdot \beta}{B \cdot \alpha}\right)$$

$$P = -\frac{C}{B} \cdot N \cdot \left(m^2 - \frac{B \cdot \gamma}{C \cdot \beta}\right)$$

$$Q = -\frac{D}{C} \cdot P \cdot \left(m^2 - \frac{C \cdot \delta}{D \cdot \gamma}\right)$$

$$R = -\frac{E}{D} \cdot Q \cdot \left(m^2 - \frac{D \cdot \varepsilon}{E \cdot \delta}\right)$$

&c.

lege ita regulari progrediuntur, ut facillimum sit, subsequentem quemcunque ex praecedente formare. At ex superioribus (§. 5) est

$$\frac{\alpha}{A} = 1^2; \frac{A \cdot \beta}{B \cdot \alpha} = 3^2; \frac{B \cdot \gamma}{C \cdot \beta} = 5^2; \frac{C \cdot \delta}{D \cdot \gamma} = 7^2; \frac{D \cdot \varepsilon}{E \cdot \delta} = 9^2; \text{ &c.}$$

unde concluditur, esse

$$M = -A(m^2 - 1).$$

$$N = +B(m^2 - 1)(m^2 - 3^2).$$

$$P = -C(m^2 - 1)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)$$

$$Q = +D(m^2 - 1)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)(m^2 - 7^2)$$

$$R = -E(m^2 - 1)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)(m^2 - 7^2)(m^2 - 9^2)$$

&c.

Cum igitur (§. 1.) sit $A = \frac{1}{2 \cdot 3}$; $B = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$;

$C = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$; &c. prodit

Sin

$$\text{Sin} . m\Phi = m . \sin . \Phi - \frac{m(m^2-1)}{2\cdot 3} . \sin . \Phi^3 + \frac{m . (m^2-1)(m^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} . \sin \Phi^5 - \text{\&c.}$$

quae ipsa est illa series, cujus demonstratio stricte sic dicta desiderabatur.

Haec jam series, cujus demonstrationem desideratam hic tradidi, si per $\frac{\cos . \Phi}{\sqrt{(1-\sin \Phi^2)}} = 1$, quantitate radicali $(1-\sin . \Phi^2)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem consueto more evoluta, multiplicetur; immediate obtinetur altera:

$$\text{Sin} . m . \Phi = \cos . \Phi [m . \sin . \Phi - \frac{m\,m^2-2^2)}{2\cdot 3} . \sin . \Phi^3 + \frac{m . (m^2-2^2)\,m^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} . \sin \Phi^5 - \text{\&c.}]$$

quarum binarum serierum demonstrationem tradere propositum fuit.

Ceterum, si quis modi, quo nascitur prior harum serierum, penitiore indagine supersedere velit: ista series etiam breviore methodo, sed minus stricta, inveniri potest, quam hic paucis indigitasse sufficiet. Posito scilicet $\sin . \Phi = y$ et $\sin . m . \Phi = Y$, ita, ut sit Arc Sin $Y = m$. Arc. Sin. y: cum sit Arc. Sin. $Y = Y + \alpha . Y^3 +$ &c. et Arc. Sin . $y = y + \alpha . y^3 +$ &c., si fingatur $Y = A . y + B . y^3 + C . y^5 +$ &c. adeoque $Y^3 = A^3 . y^3 + 3 . A^2 B y^5 +$ &c.; $Y^5 = A^5 . y^5 + \ldots .$ &c; substitutis his valoribus et aequatis terminis homologis colligitur $A = m$; $B = -m(m^2-1) . \alpha$ &c unde ipsa series proposita $\sin m\Phi = m . \sin \Phi - \frac{m . (m^2-1)}{2\cdot 3} . \sin \Phi^3 +$ &c. oritur.

OBSERVATIONS

sur le théorème de *Taylor*,

avec

sa démonstration par la méthode des limites;

application de ce théorème, ainsi démontré, à la démonstration du binome de *Newton*, dans le cas où l'exposant est une quantité fractionnaire, négative et incommensurable avec l'unité; suivie de la résolution d'un problème qui concerne la méthode inverse des tangentes, par le moyen de ce théorème.

Par *S. GOURIEF.*

Traduit du Russe.

Présenté à l'Académie et lu en langue russe le 19 Septbr. 1799.

Ce théorème a été fondé jusqu'ici sur le calcul différentiel, ayant été démontré ou par la méthode des indéterminées, comme le fit *Taylor* lui-même, dans son ouvrage intitulé: *Methodus incrementorum*, ou par le binome de *Newton*, comme le fit le grand *Euler* dans son ouvrage intitulé: *Institutiones calculi differentialis*, au lieu que le celèbre *Lagrange*, en fondant àprésent sur ce théorème le calcul différentiel, le démontre au contraire directement, sans employer ce calcul, dans son ouvrage qui a pour titre: *Théorie des fonctions analytiques*, et qui a paru depuis peu. Cette nouvelle méthode de démontrer une vérité connue, m'a

m'a rappellé les idées que j'avais eues depuis long-tems sur la démonstration de ce théorème, et ces idées ainsi renouvellées m'ont conduit à ce que je cherchois auparavant sans succès.

Soit L N une courbe quelconque, A Q son axe, et soient $AP = x$, $AP' = x + \Delta x$, $AP'' = x + 2\Delta x$, $AP''' = x + 3\Delta x$, $AP^{IV} = x + 4\Delta x \ldots$ $AQ = x + n\Delta x$ les abscisses, dont les différences sont constantes, et $PM = y$, $P'M' = y'$, $P''M'' = y''$, $P'''M''' = y'''$, $P^{IV}M^{IV} = y^{IV} \ldots$ $QN = Y$ les ordonnées correspondantes, dont les différences croissent ou décroissent selon que la courbe est convexe ou concave; et que les ordonnées elles mêmes croissent ou décroissent; nous supposerons dans tous les cas les ordonnées, ainsi que leurs différences premieres, secondes, &c. croissantes: l'erreur qui peut provenir de cette supposition dans quelques cas, se corrigera par le signe —. Ainsi on aura en général: Tab. I. Fig. 5.

$y' - y = \Delta y$, $y'' - y' = \Delta y'$, $y''' - y'' = \Delta y''$, $y^{IV} - y''' = \Delta y'''$ ... &c.

$\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y$, $\Delta y'' - \Delta y' = \Delta^2 y'$, $\Delta y''' - \Delta y'' = \Delta^2 y''$, $\Delta y^{IV} - \Delta y''' = \Delta^2 y'''$ &c.

$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y$, $\Delta^2 y'' - \Delta^2 y' = \Delta^3 y$, $\Delta^2 y''' - \Delta^2 y'' = \Delta^3 y''$ ... &c.

$\Delta^3 y' - \Delta^3 y = \Delta^4 y$, $\Delta^3 y'' - \Delta^3 y' = \Delta^4 y' \ldots\ldots\ldots$ &c.

$\Delta^4 y' - \Delta^4 y = \Delta^5 y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ &c.

&c.

D'où résultent les déterminations suivantes des ordonnées, y', y'', y''', y^{iv}, &c. correspondantes aux abscisses $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, $x + 4\Delta x$, . . &c.

$y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = y + \Delta y$

$y'' = y' + \Delta y' [= y + \Delta y + \Delta y + \Delta^2 y] = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$

$y''' = y'' + \Delta y'' [= y + 2\Delta y + \Delta^2 y + (\Delta y' + \Delta^2 y = \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y + \Delta^3 y$

$= \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y)] \ldots . = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y,$

$y^{iv} = y''' + \Delta y''' [= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$

$+ (\Delta y'' + \Delta^2 y'' = \Delta y' + \Delta^2 y' + \Delta^2 y' + \Delta^2 y' + \Delta^3 y' = \Delta y + \Delta^2 y$

$+ 2(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + \Delta^3 y + \Delta^4 y = \Delta y + 3\Delta^2 y + 3\Delta^3 y + \Delta^4 y)] \ldots .$

$= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y,$

$y^v = y^{iv} + \Delta y^{iv} [= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y + (\Delta y'''$

$+ \Delta^2 y''' = \Delta y'' + \Delta^2 y'' + \Delta^2 y'' + \Delta^3 y'' = \Delta y' + \Delta^2 y'$

$+ 2(\Delta^2 y' + \Delta^3 y') + \Delta^3 y' + \Delta^4 y' = \Delta y + \Delta^2 y + 3(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$

$+ 3(\Delta^3 y + \Delta^4 y) + \Delta^4 y + \Delta^5 y = \Delta y + 4\Delta^2 y + 6\Delta^3 y + 4\Delta^4 y$

$+ \Delta^5 y)] \ldots = y + 5\Delta y + 10\Delta^2 y + 10\Delta^3 y + 5\Delta^4 y + \Delta^5 y,$ &c.

De là il est clair que les coëfficiens dans ces valeurs des ordonnées y', y', y'', y^{iv}, y^v, &c. sont exactement les mêmes que dans les puissances du binome, quand on l'élève selon l'ordre des nombres naturels; et comme on démontre la loi que suivent ces derniers coëfficiens, dans les cas de l'exposant positif et entier, par le moyen des permutations et des combinaisons des lettres, ou par le moyen des nombres figurés, d'une manière très rigoureuse et satisfaisante, nous pouvons regarder comme absolument démontré que l'ordonnée

donnée Y correspondante à l'abscisse $x + n\Delta x$ doit avoir la détermination suivante :

$$Y = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \ldots : + \frac{n(n-1) \ldots 2 \ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots \ldots (n-1) \cdot n} \cdot \Delta^n y.$$

Puisque l'ordonnée y ou aura enfin des différences constantes, ou ne les aura pas, le nombre des termes de la série trouvée sera ou plus petit que $n + 1$ ou toujours égal à $n + 1$. Ainsi, quand les premières différences Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, &c. sont constantes, la série aura seulement deux termes $y + n\Delta y$; car alors $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, ... $\Delta^n y = 0$; quand les secondes différences $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y'$, $\Delta^2 y''$, &c. sont constantes, la série aura trois termes $y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y$, puisque alors $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ . . . . . $\Delta^n y = 0$; quand les différences troisièmes $\Delta^3 y$, $\Delta^3 y'$, $\Delta^3 y''$ &c. sont constantes, la série aura quatre termes $y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y$; car alors $\Delta^4 y$ . . . . $\Delta^n y = 0$; et ainsi de suite jusqu'à n différences constantes, auquel cas le nombre des termes sera $n + 1$; mais puisque le nombre n est pris arbitrairement, en l'augmentant on aura encore une telle série, dont le nombre des termes sera moindre que $n + 1$. Ainsi on peut toujours supposer que cette série soit telle que le nombre de ses termes est ou moindre que $n + 1$ et constant, ou égal à $n + 1$, et variable quand n varie.

De là il est clair que deux cas ont nécessairement lieu. Ainsi

Cas I.

Cas I.

Supposons que l'ordonnée y ait les différences m constantes, où $m < n$, et changeons la série trouvée plus haut en celle-ci:

$$Y = y + n\Delta x \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta x^2 . \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta x^3 . \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-(m-2))}{1.2.3\ldots\ldots m}\Delta^m x . \frac{\Delta^m y}{\Delta x^m},$$

ensuite en celle-ci:

$$Y = y + n\Delta x . \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(\frac{n^2\Delta x^2}{1.2} - \frac{1}{2}n\Delta x . \Delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$
$$+ \left(\frac{n^3\Delta x^3}{1.2.3} - \frac{1}{2}n^2\Delta x^2\Delta x + \frac{1}{3}n\Delta x\Delta x^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{n^m\Delta x^m}{1.2.3\ldots m} - an^{m-1}\Delta x^{m-1}.\Delta x + bn^{m-2}\Delta x^{m-2}\Delta x^2 - \ldots\ldots \mp rn\Delta x\Delta x^{m-1}\right)\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m}$$

où a, b, ... r sont des coëfficiens numériques (*).

Puisque cette série, ou pour mieux dire, son égalité avec l'ordonnée Y a toujours lieu, quelque petite que soit la différence Δx, supposons que Δx diminue toujours de sa moitié et que le nombre n devienne deux fois plus grand, de manière que $n\Delta x$ demeure une quantité constante, que je nommerai q; notre série deviendra

Y =

(*) Ces coëfficiens numériques sont faciles à trouver: ainsi le coëfficient a est une fraction dont le numérateur est le m^{me} terme des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 121 &c., ou des nombres dont les différences secondes sont constantes, et le dénominateur est le produit constant $1.2.3\ldots.m$; le coëfficient b est une fraction dont le numérateur est le $m-1$ terme des nombres 2, 11, 35, 85, 175, 332 &c. dont les différences quatrièmes sont constantes, et le dénominateur le même produit constant, et ainsi de suite.

$$Y = y + q.\frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(\frac{q^2}{1.2} - \frac{1}{2}q\Delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \left(\frac{q^3}{1.2.3} - \frac{1}{2}q^2\Delta x + \frac{1}{3}q\Delta x^3\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$
$$+ \ldots + \left(\frac{q^m}{1.2.3\ldots m} - aq^{m-1}\Delta x + bq^{m-2}\Delta x^2 - \ldots \mp rq\Delta x^{m-1}\right)\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m},$$

A mesure que Δx diminue, les termes de cette série varient et ont des limites, savoir: la limite du terme $q\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est $q\frac{\partial y}{\partial x}$; la limite du terme $\left(\frac{q^2}{1.2} - \frac{1}{2}q\Delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ est $\frac{q^2}{1.2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; la limite du terme $\left(\frac{q^3}{1.2.3} - \frac{1}{2}q^2\Delta x + \frac{1}{3}q\Delta x^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ est $\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$; et ainsi de suite jusqu'au terme

$$\left(\frac{q^m}{1.2.3\ldots m} - aq^{m-1}\Delta x + bq^{m-2}\Delta x^2 \ldots \mp rq\Delta x^{m-1}\right)\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m},$$

dont la limite est

$$\frac{q^m}{1.2.3\ldots m}.\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = \frac{q^m}{1.2.3\ldots m}.\frac{\partial^m y}{\partial x^n},$$

puisque la différence $\Delta^m y$ est constante par la supposition.

Et comme ces termes, malgré leur variabilité, font avec y toujours une même grandeur Y déterminée et constante, leurs limites avec y font, en vertu des principes du calcul de la méthode des limites, la même grandeur Y; donc on aura

$$Y = y + q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q^2}{1.2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{1.2.3}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots\ldots \frac{q^m}{1.2.3\ldots m}.\frac{\Delta^m y}{\partial x^m}.$$

Remarque I.

Puisque les termes $\left(\frac{q^2}{1.2} - \frac{1}{2}q\Delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\left(\frac{q^3}{1.2.3} - \frac{1}{2}q^2\Delta x + \frac{1}{3}q\Delta x^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, &c. sont composés de deux facteurs variables, on peut nous dire qu'il reste encore à savoir, s'ils sont

sont constans ou s'ils varient. Mais cette objection n'a aucune difficulté; car supposons que ces termes conservent toujours une grandeur constante; par les principes de la méthode des limites déjà cités, les produits des limites de leurs facteurs auront la même valeur, de manière qu'il viendra $(\frac{q^2}{1.2}-\frac{1}{2}q\Delta x)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{q^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $(\frac{q3}{1.2.3}-\frac{1}{2}q^2\Delta x+\frac{1}{3}q\Delta x^2)\frac{\Delta 3y}{\Delta x3}=\frac{q3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial 3y}{\partial x3}$, &c. et comme le second et le dernier terme

$$q\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ et } \frac{q^m}{1.2.3\ldots m}-aq^{m-1}\Delta x+bq^{m-2}\Delta x^2-\ldots\mp rq\Delta^{m-1}x\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m}$$

varient très certainement, nous sommes encore conduits à la même conclusion que nous avons faite ci-dessus, en supposant que tous les termes varient, excepté y.

Remarque 2.

Pour rendre tout cela parfaitement évident, je suis obligé de renvoyer à me principes de la Géometrie transcendante, présentés à l'Académie en 1796, parceque il n'y a point d'autre ouvrage dans lequel on put trouver développés les fondemens nécessaires Ces principes d. Géometrie transcendente seront bientôt publiés, si quelques circonstances ne l'empêcheront.

Cas II.

Supposons que l'ordonnée y n'ait aucune différence constante, notre série sera

$$Y=y+n\Delta y+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3.\ldots\ldots(n-2)(n-1).n}\Delta^n y;$$

où,

où, quoique le coëfficient du dernier terme ne soit autre chose que l'unité, nous lui laisserons la forme, dans laquelle il se présente naturellement.

Changeons cette série en celle-ci:

$$X = y + n\Delta x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(\frac{n^2\Delta x^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{2}n\Delta x^2\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \left(\frac{n3\Delta x3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2}n^2\Delta x^3 + \frac{1}{3}n\Delta x^3\right)\frac{\Delta 3y}{\Delta x3}$$
$$+ \ldots + \left(\frac{n^n\Delta x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} - an^{n-1}\Delta x^n + bn^{n-2}\Delta x^n - \ldots \mp rn\Delta x^n\right)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

ou encore en la suivante:

$$Y = y + n\Delta x.\frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(\frac{(n\Delta x)^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{2}(n\Delta x)^2\tfrac{1}{n}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \left(\frac{(n\Delta x)3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2}(n\Delta x)^3\tfrac{1}{n} + \frac{1}{3}(n\Delta x)^3\tfrac{1^2}{n}\right)\frac{\Delta 3y}{\Delta x3}$$
$$+ \ldots \mp \left(\frac{(n\Delta x)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} - a(n\Delta x)^n\tfrac{1}{n} + b(n\Delta x)^n\tfrac{1}{n^2} - \ldots \mp r(n\Delta x)^n\frac{1}{n^{n-1}}\right)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}.$$

Supposons que $n\Delta x$ soit une quantité constante égale à q, on aura

$$Y = y + q\frac{\Delta y}{\Delta x} + q^2\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + q^3\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\frac{\Delta 3y}{\Delta x3}$$
$$+ \ldots + q^n\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} - a\cdot\frac{1}{n} + b\frac{1}{n^2} - \ldots \mp r\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}.$$

Puisque cette série a toujours lieu, quelque soit la diminution de Δx et l'augmentation de n, pourvû qu'il y ait $n\Delta x = q$, nous supposerons que la différence Δx soit diminuée de sa moitié et le nombre n augmenté au double, ou, ce qui est la même chose, nous diminuerons la différence Δx de sa moitié et laisserons à n sa valeur, en écrivant $2n$ au lieu de n; les termes de la série ci-dessus varieront de manière que dans leurs coëfficiens au lieu de $\frac{1}{n}$ il viendra $\frac{1}{2n}$, et il y accédera encore les termes suivans dont le nombre sera n:

$$+q^{n+1}\left(\frac{1}{1.2.3.\ldots.n(n+1)}-a'\frac{1}{2n}+b'\left(\frac{1}{2n}\right)^2-\ldots\mp r'\left(\frac{1}{2n}\right)^n\right)\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}$$

$$+q^{n+2}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)}-a''\frac{1}{2n}+b''\left(\frac{1}{2n}\right)^2-\ldots\mp r''\left(\frac{1}{2n}\right)^{n+1}\right)\frac{\Delta^{n+2}y}{\Delta x^{n+2}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^{2n}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n\ldots.2n}-a_{/}\frac{1}{2n}+b_{/}\left(\frac{1}{2n}\right)^3-\ldots\mp r_{/}\left(\frac{1}{2n}\right)^{2n-1}\right)\frac{\Delta^{2n}y}{\Delta x^{2n}},$$

où a', b' .... r', a'', b'' .... a_1, b_1 .... sont les coëfficiens numériques.

Mais sans nous arrêter à des cas particuliers, supposons que Δx soit diminué m fois et écrivons mn au lieu de n, nous aurons

$$Y=y+q\frac{\Delta y}{\Delta x}+q^2\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2y}{\Delta x^2}+q^3\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2}.\frac{1}{mn}+\frac{1}{3}\frac{1}{mn}\right)^2\frac{\Delta^3y}{\Delta x^3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^n\left(\frac{1}{1.2.3.\ldots.n}-a\frac{1}{mn}+b\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\ldots\mp r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-1}\right)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

$$+y^{n+1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}-a'\frac{1}{mn}+b'\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r'\left(\frac{1}{mn}\right)^n\right)\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}$$

$$+q^{n+2}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)}-a''\frac{1}{mn}+b''\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r''\left(\frac{1}{mn}\right)^{n+1}\right)\frac{\Delta^{n+2}y}{\Delta x^{n+2}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^{2n}\left(\frac{1}{1.2.3.4.\,n(n+1)\ldots 2n}-a_1\frac{1}{mn}+b_1\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r_1\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n-1}\right)\frac{\Delta^{2n}y}{\Delta x^{2n}}$$

$$+q^{2n+1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2n+1)}-a_2.\frac{1}{mn}+b_2\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r_2\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n}\right)\frac{\Delta^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^{mn}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)\ldots mn}-\alpha\frac{1}{mn}+\beta\left(\frac{1}{mn}-\ldots.p\left(\frac{1}{mn}\right)^{mn-1}\right)\frac{\Delta^{mn}y}{\Delta x^{mn}}.\right.$$

De

De là on voit que les derniers termes ont un facteur commun q^n, et que par conséquent on peut représenter leur somme par $q^n . Z$, de sorte qu'on aura

$$Y = y + q\frac{\Delta y}{\Delta x} + q^2\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + q^3\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{mn}\right)^3\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q^n . Z.$$

En considérant les termes $q\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $q^2\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $q^3\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, &c. de cette série, nous pouvons dire pour sûr : que le premier d'eux, par la diminution de Δx et par l'augmentation correspondante de m, varie réellement ; mais des autres on ne peut pas dire, avec le même assûrance, s'ils varient ou s'ils sont constans, puisque, outre le facteur constant, qui eſt une puiſſance connuë de q, ils ſont compoſés de deux facteurs variables ; mais heureuſement nous n'aurons aucune difficulté particuliere quoi qu'il en ſoit de ces deux cas. En effet, ſi nous ſuppoſons que ces termes conſervent conſtamment la même valeur, les produits de leurs limites auront la même valeur, de maniere qu'il viendra $q^2\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = q^2\cdot\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $q^3\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2}\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = q^3\cdot\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, &c. et par conſéquent, comme le premier terme $q\frac{\Delta y}{\Delta x}$ varie affûrément, et qu'il a pour limite $q\frac{\partial y}{\partial x}$, leur ſomme $q\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$+ q^2\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + q^3\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2}\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ q^{n-1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} - {}'a\cdot\frac{1}{mn} + {}'b\left(\frac{1}{mn}\right)^2 \ldots \mp {}'r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-2}\right)\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}$$

ſera une grandeur variable ayant pour limite

$$q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\cdot\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}.$$

Et quand ces mêmes termes varient, puisque de là on ne peut pas encore conclure, ſi leur ſomme varie ou ſi elle eſt conſtante, nous ſuppoſerons d'abord qu'elle ait toujours une valeur conſtante; alors, puiſque le nombre n eſt pris arbitrairement, nous en prendrons à ſa place un autre qui ſoit d'une unité plus grand ou plus petit, et nous aurons une ſomme $q\frac{\Delta y}{\Delta x} + q^2\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$

$$+ q^3\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ q^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} - {}'a\frac{1}{mn} + {}'b\left(\frac{1}{mn}\right)^2 - \ldots \mp {}'r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-2}\right)\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}},$$

dont la grandeur varie auſſi et dont la limite eſt $q\frac{\partial y}{\partial x}$

$$+ \frac{q^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots\ldots + \frac{q^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\cdot\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}.$$

Car dans le premier cas il s'ajoute un terme qui avant ſe trouvoit dans la quantité $q\,Z$, laquelle, dans cette hypothèſe eſt conſtante et dont le nombre des termes augmente continuellement, et chacun d'eux, par conſéquent, varie néceſſairement; dans l'autre cas la somme constante est diminuée d'un terme qui, par hypotheſe, eſt variable. Ainſi on voit clairement qu'on peut toujours ſuppoſer que la ſomme $q\frac{\Delta y}{\Delta x} + q^2\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + q^3\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} - {}'a\frac{1}{mn} + {}'b\left(\frac{1}{mn}\right)^2 - \ldots \mp {}'r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-2}\right)\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}$$

ſoit une quantité variable, ayant pour limite la grandeur

q

$$q\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{q^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\ldots\ldots+\frac{q^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\,(n-1)}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}};$$

et comme cette quantité, avec les grandeurs y et $q^n Z$, dont la premiere eſt conſtante, fait toujours une grandeur conſtante et déterminée Y, nous concluons de là que la grandeur q^n Z, et par conſéquent Z, eſt auſſi variable et a une limite. Déſignons par R la limite de la grandeur Z; $q^n R$ ſera la limite de la grandeur $q^n Z$ et $Y = y + q\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{q^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$+\frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\ldots\ldots+\frac{q^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+q^n R$$

À préſent pour connoître la nature de la limite R de Z, je remarque que la quantité q, qui entre dans Z comme conſtante, a été priſe arbitrairement, et que la quantité Z, quelque ſoit la valeur de q, a la même expreſſion; d'où je tire la concluſion que pareillement la limite R doit avoir la même expreſſion, quelle que ſoit la valeur de q; et par conſéquent, par la variabilité de q la valeur de la limite R variera de maniere que cette limite reſtera pour toujours la limite de la quantité Z, quel que ſoit le changement de cette quantité. Ainſi quand on ſuppoſe $q = 0$, R ſera la limite de ce que devient Z dans cette même ſuppoſition; mais dans la ſuppoſotion de $q = 0$, Z devient

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}-a\frac{1}{m\,n}+b\left(\frac{1}{m\,n}\right)^2-\ldots\ldots\mp r\left(\frac{1}{m\,n}\right)^n-1\right)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n},$$

dont la limite eſt $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, donc dans cette ſuppoſition R ſera $\frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$. Ainſi la nature de la limite

R

R est telle, qu'elle reçoit une valeur déterminée et réelle $\frac{1}{1.2.3\ldots n}.\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, lorsque $q = 0$.

De là il suit que q R, dans la supposition de $q = 0$, devient nul, et qu'en prenant q pour l'abscisse, q R représentera l'ordonnée d'une courbe qui coupe son axe à l'origine des abscisses; mais il est clair que dans une telle courbe, après avoir diminué suffisamment l'abscisse q, l'ordonnée qR peut devenir plus petite que toute quantité arbitrairement donnée; ainsi q R peut devenir plus petite que $\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$, et q^nR plus petite que $\frac{q^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$; et comme n peut être tel nombre entier qu'on voudra, il s'en suit qu'après avoir diminué suffisamment la quantité q, chaque terme peut devenir plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent.

La même chose a lieu dans le premier cas du théorème de Taylor et se démontrera de la même manière. Ainsi ce théorème est démontré, comme il a été prétendu.

Ce théorème ainsi démontré, nous l'appliquerons à la démonstration du binome de Newton, dans le cas de l'exposant fractionnaire, négatif et incommensurable avec l'unité.

À cette fin supposons $y = x^m$; on aura $\frac{\partial y}{\partial x} = mx^{m-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, et

et ainſi de ſuite ; ce qui ſe peut démontrer rigoureuſement par le moyen des logarithmes et de la logarithmique, quel que ſoit l'expoſant m ; enſuite il viendra

$$Y = (x+q)^m = x^m + m x^{m-1} q + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} q^3$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)} x^{m-(n-1)} q^{n-1} + R q^n,$$

où n eſt le nombre des termes, excepté la quantité $R q^n$ que nous nommerons dans la ſuite *le reſte*.

Si, en prenant n pour un nombre conſtant, nous ajoutons encore le terme $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-2))(m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n} x^{m-n} q^n$, le reſte prendra une autre forme $R' q^{n+1}$, et ſi nous ajoutons encore un terme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-2))(m-(n-1))(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \cdot (n+1)} x^{m-(n+1)} q^{n+1},$$

ce reſte prendra encore une autre forme $R'' q^{n+2}$, et ainſi de ſuite.

Suppoſons que m ſoit une quantité poſitive, qui peut d'ailleurs être fractionnaire ou incomenſurable avec l'unité ; en conſidérant le terme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)} x^{m-(n-1)} q^{n-1},$$

je remarque que le nombre n, qui peut être augmenté à volonté, ſurpaſſera enfin la quantité $m+2$; d'où je conclus que ce terme ſera enfin négatif et deviendra

$$- \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(n-(m+2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)} x^{m-(n-1)} q^{n-1} \text{ (A)} ;$$

mais le terme ſuivant conſervera le même ſigne poſitif, en prenant cette forme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n-(m+2))(n-(m+1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1) \cdot n} x^{m-n} q^n \text{ (B)} ;$$

enſuite

ensuite le terme qui suit celui-ci sera encore négatif et deviendra

$$-\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n-(m+2))(n-(m+1))(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n\cdot n+1}x^{m-(n+1)}q^{n+1}\,(C),$$

et ainsi de suite.

De là il suit que le reste Rq^n sera $= B + R'q^{n+1} = B - C + R''q^{n+2} =$ et ainsi de suite. Or comme il est démontré qu'après avoir diminué suffisamment la quantité q, les restes Rq^n, $R'q^{n+1}$ et $R''q^{n+2}$ peuvent devenir plus petits que leurs derniers termes A, B et C: nous supposerons que cela soit arrivé en effet, et nous allons voir quelle grandeur doit avoir la quantité q dans cet état des restes. Pour cet effet je remarque que, puisque $Rq^n = B - (C - R''q^{n+2})$, Rq^n est plus petit que B, et sera nécessairement plus petit que A, quand B deviendra plus petit que A; d'où, en prenant au lieu de B et A leurs valeurs, je conclus que Rq^n sera nécessairement plus petit que A, quand $\frac{q}{x} < \frac{n}{n-(m+1)}$; et comme $\frac{n}{n-(m+1)}$ est toujours > 1, Rq^n sera encore plus petit que A, quand $\frac{q}{x} < 1$, ou $q < x$. Et voilà comment doit être la petite quantité q, pour que le dernier terme A soit toujours plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent.

Nous avons supposé ici que q soit une quantité positive; mais elle peut être aussi négative. Alors, si n, qui comme nous vu plus haut, est seulement $>$ que $m+2$, est un nombre pair, les termes A, B, C, &c. deviennent tous positifs; et si ce nombre est impair, ces termes seront au contraire tous négatifs; ce qui est évident. Ainsi dans le

le premier cas le reſte Rq^n ſera $= B + R'q^{n+1} = B + C + R''q^{n+2} =$ &c. D'où, à cauſe de $Rq^n < A$, il ſuit néceſſairement que le terme $B < A$ et que $\frac{q}{x} < \frac{n}{n-(m+1)}$. Mais cela ne ſuffit pas pour conclure que le reſte Rq^n ſoit plus petit que ſon dernier terme A; car B eſt plus petit que Rq^n; ainſi en remarquant que $R'q^{n+1} < B$, et $B + R'q^{n+1} (= Rq^n) < 2B$, je trouve que Rq^n ſera néceſſairement plus petit que A, quand 2B deviendra plus petit que A; d'où en prenant au lieu de B et A leurs valeurs, je conclus que Rq^n ſera néceſſairement plus petit que A, quand $\frac{q}{x} < \frac{1}{2}\frac{n}{n-(m+1)}$, et comme $\frac{1}{2}\frac{n}{n-(m+1)}$ eſt toujours $> \frac{1}{2}$, Rq^n ſera encore plus petit que A, quand $\frac{q}{x} < \frac{1}{2}$, ou $q < \frac{1}{2}x$. Ainſi içi la limite de la petiteſſe de q, pour que le dernier terme A ſoit toujours plus grand que la ſomme de tous les termes qui le ſuivent, eſt la moitié de ſa premiere valeur; et cela n'a rien de ſurprenant, comme chacun peut le concevoir

Dans l'autre cas la même choſe ſe démontrera de la même manière.

Conſidérons à préſent de quelle maniere doivent diminuer les termes de la ſérie, quand en général $q < x$.

Pour cet effet je remarque que $A : B = 1 : \frac{n-(m+1)}{n} \cdot \frac{q}{x}$, $B : C = 1 : \frac{n-m}{n+1} \cdot \frac{q}{x}$, $C : D = 1 : \frac{n-(m-1)}{n+2}\frac{q}{x}$, et ainſi de ſuite; d'où je trouve $B = A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}$, $C = B\left(\frac{n-m}{n+1}\right)\frac{q}{x} = A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\left(\frac{n-m}{n+1}\right).\left(\frac{q}{x}\right)^2$, $D = C\left(\frac{n-(m-1)}{n+2}\right)\frac{q}{x} = A\left(\frac{n-(m-1)}{n}\right)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{n-(m-1)}{n+2}\right)\left(\frac{q}{x}\right)^3$, et ainſi de ſuite,

jusqu'au terme du rang $n+z$, que nous déſignerons par N, et qui ſera =

$$A\left(\frac{n-(m-1)}{n}\right)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{n-(m-1)}{n+2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n+z-(m+2)}{n+z-1}\right)\left(\frac{q}{x}\right)^z;$$

mais parceque chacun de ces facteurs : $\frac{n-(m-1)}{n}$, $\frac{n-m}{n+1}$, $\frac{n-(m-1)}{n+2}$ . . . . . $\frac{n+z-(m+2)}{n+z-1}$ eſt plus petit que l'unité, on voit que le terme N eſt plus petit que la quantité $A\left(\frac{q}{x}\right)^z$, qui par l'augmentation du nombre z peut devenir plus petite que toute quantité δ artitrairement donnée ; car comme $\frac{q}{x}$ eſt une fraction dont le numérateur eſt plus petit que ſon dénominateur, $\left(\frac{q}{x}\right)^z$ peut devenir plus petit que $\frac{\delta}{A}$; donc à plus forte raiſon le terme N peut devenir plus petit que toute quantité arbitrairement donnée. Et voilà comment les termes de notre ſérie diminuent, quand $q < x$.

Puisque le reſte $R_1 q^{n+z}$, dans le cas de $q < x$, ou $q < \frac{1}{2}x$, eſt toujours plus petit que ſon dernier terme N, ce reſte, par l'augmentation du nombre des termes, peut, à plus forte raiſon, devenir plus petit que toute quantité arbitrairement donnée. Et voilà une choſe qui n'a jamais eté démontrée par aucune méthode connue, et vraiſemblement ne pourra pas l'être.

De là il eſt clair que dans le cas de $q < x$, ou $q < \frac{1}{2}x$, et de l'exposant fractionnaire ou incommenſurable avec l'unité

té, la grandeur contenue dsns la férie $x^m \pm m x^{m-1} q + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} q^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} q^3 +$ &c ne ſçauroit être que variable, ayant pour limite la fonction $(x \pm q)^m$.

Remarque 1.

Pour démontrer que la fraction $\frac{q}{x}$, dont le numérateur q eſt plus petit que le dénominateur, étant élevée ſuivant l'ordre des nombres naturels, peut devenir plus petite que toute quantité arbitrairement donnée, il faut connoître le lemme ſuivant:

La fraction $\frac{x}{q}$, où $x > q$, étant élevée ſuivant l'ordre des nombres naturels, peut ſurpaſſer toute quantité arbitrairement donnée.

Démonſtr. Suppoſons $x - q = a$, nous aurons $x = q + a$, $\frac{x^2}{q^2} = \frac{q^2 + 2qa + a^2}{q^2}$, $\frac{x^3}{q^3} = \frac{q^3 + 3q^2 a + 3qa^2 + a^3}{q^3}$ &c.; enſuite il viendra $\frac{x^2}{q^2} - \frac{x}{q} = \frac{qa + a^2}{q^2}$, $\frac{x^3}{q^3} - \frac{x^2}{q^2} = \frac{q^2 a + 2qa^2 + a^3}{q^3}$, &c.; d'où l'on voit que $\frac{q^2 a + 2qa^2 + a^3}{q^3} > \frac{qa + a^2}{q^2}$ &c., et que, par l'élévation la, fraction $\frac{x}{q}$ croît d'abord de la quantité $\frac{qa + a^2}{q^2}$, enſuite de la quantité $\frac{q^2 a + 2qa^2 + a^3}{q^3}$, qui eſt plus grande que la premiere, et ainſi de ſuite; mais il eſt clair que quand une quantité reçoit des accroiſſemens d'une telle manière, elle peut ſurpaſſer toute quantité arbitrairement donnée, donc &c.

Qu'on demande à préſent que la fraction $\frac{q}{x}$, par le moyen de l'élévation en puiſſance, devienne plus petite qu'une quantité donnée quelconque δ ; puisque la fraction $\frac{q}{x}$, par le lemme précédent, peut être élevée de manière qu'elle ſurpaſſe la quantité donnée $\frac{1}{\delta}$, en ſuppoſant que z ſoit l'expoſant de cette élévation, on aura $\left(\frac{x}{q}\right)^z$, ou $\frac{x^z}{q^z} > \frac{1}{\delta}$; d'où il viendra $\frac{q^z}{x^z}$ ou $\left(\frac{q}{x}\right)^z < \delta$.

Remarque 2.

Dans le cas où q eſt une quantité négative, on peut nous dire que pour l'uſage de la ſérie il ſuffit d'avoir $q < x$, au lieu que nous avons trouvé $q < \frac{1}{2}x$; cela eſt vrai, car la ſérie deviendra déjà convergente, pourvu que $q < x$; mais il n'eſt pas moins vrai que dans cette hypothèſe elle ne ſera pas toujours convergente au point que nous l'avons voulu, ſavoir de manière que chaque terme ſoit plus grand que la ſomme de tous les termes qui le ſuivent. Pour que cette condition ait lieu dans tous les cas poſſibles, il faut néceſſairement que $q < \frac{1}{2}x$, de ſorte que quand q ne ſera pas $< \frac{x}{2}$, quoique d'ailleurs $q < x$, cette condition n'aura pas lieu dans certains cas. Le lecteur plus accoûtumé à la méthode des infiniment-petits qu' à celle des limites, peut s'en convaincre de la manière ſuivante :

Premièrement je remarque que la ſomme de la ſérie $\mathbf{A}\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x} + \mathbf{A}\left(\frac{n-(m-1)}{n}\right)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{q}{x}\right)^2$

$+$

$+ A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{n-(m-1)}{n+2}\right)\left(\frac{q}{x}\right)^3 +$ &c. (S) eſt plus petite que la ſomme de la ſérie $A\frac{q}{x} + A\left(\frac{q}{x}\right)^2 + A\left(\frac{q}{x}\right)^3 +$ &c. (T) et plus grande que la ſomme de la ſérie $A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x} + A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)^2\left(\frac{q}{x}\right)^2 + A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)^3\left(\frac{q}{x}\right)^3 +$ &c. (V); — le premier eſt évident, et le ſecond Ie devient en conſidérant que $\frac{n-(m+1)}{n} < \frac{n-m}{n+1} < \frac{n-(m-1)}{n+2} <$ &c, c'eſt de quoi chacun peut s'aſſûrer ſans peine, en reduiſant ces fractions au même dénominateur; enſuite je trouve que les ſommes des ſeries T et V, continuées jusqu' à l'infini, ſont $\frac{A\cdot\frac{q}{x}}{1-\frac{q}{x}}$, $\frac{A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}}{1-\left(\frac{n-(m+1)}{q}\right)\frac{q}{x}}$; d'où je conclus que Ia ſomme de notre ſérie S, continuée jusqu'a l'infini, eſt $< \frac{A\frac{q}{x}}{1-\frac{q}{x}}$ et $> \frac{A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}}{1-\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}}$. Mais il eſt clair que la quantité $\frac{A\frac{q}{x}}{1-\frac{q}{x}}$, et par conſéquent auſſi la ſomme de Ia ſérie S, ſera moindre que A, lorsque $\frac{q}{x}$ eſt $< 1-\frac{q}{x}$, c'eſt-à-dire, lorsque $q < \frac{1}{2}x$; pareillement il eſt clair que la quantité $\frac{A\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}}{1-\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}}$, et par conséquent auſſi la ſomme de la ſérie S, ſera plus grande que A, lorsque $\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}$ eſt $> 1-\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x}$, c'eſt-à-dire lorsque $\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)\frac{q}{x} > \frac{1}{2}$; & comme le facteur $\frac{n-(m+1)}{n}$ eſt une

une fraction plus petite que l'unité, la quantité $(\frac{n-(m+1)}{n})\frac{q}{x}$ ne ſçauroit être plus grande que $\frac{1}{2}$, à moins que $\frac{q}{x}$ ne ſoit $> \frac{1}{2}$ ou $q > \frac{1}{2}x$. Donc il peut arriver que ſi $q > \frac{1}{2}x$, quoique d'ailleurs $< x$, le dernier terme A ſera moindre que la ſomme de tous les termes qui le ſuivent; et au contraire ſi $q < \frac{1}{2}x$, le dernier terme A ſera toujours plus grand que la ſomme de tous termes qui le ſuivent. Mais chacun conviendra que dans cette démonſtration du dernier cas, à cauſe de l'omiſſion du reſte $R \cdot q^{n+z}$, il reſte toujours quelque doute et une eſpèce d'incertitude; de plus elle eſt indirecte, au lieu que celle que nous avons donnée plus haut eſt très directe, rigoureuſe et ſimple.

Maintenant il nous reſte à conſidérer le cas dans lequel l'expoſant m eſt une quantité négative, et qui, à proprement parler, contient deux cas, l'un où la quantité q eſt poſitive, et l'autre où elle eſt négative.

Suppoſons que la quantité q ſoit poſitive, notre ſérie deviendra $(x+q)^{-m} = x^{-m} - m x^{-m-1}q + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^{-m-2}q^2$
$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{-m-3}q^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\mp \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}x^{-m-(n-1)}q^{m-1} + Rq^n$,
où n eſt le nombre des termes, ſans compter le reſte Rq^n, et où le ſigne $-$ eſt pour le cas de n pair, et $+$ pour le cas où il eſt impair De là il eſt clair tout de ſuite que les termes pris conſécutivement ont des ſignes différens, et par conſéquent, pour que le dernier terme ſoit toujours plus grand que la ſomme de tous les termes qui le ſuivent, on trouvera, par une conſidération ſemblable à la premiere

des

des précédentes, que le terme

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(n+m-2)(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)\cdot n}x^{-m-n}q^n$$

doit être moindre que le terme

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)}x^{-m-(n-1)}q^{n-1}$$

et que par conſéquent la quantité $(\frac{n+m-1}{n})\frac{q}{x}$, ou $(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}$, doit être moindre que 1; et c'eſt à quoi on peut toujours ſatisfaire, en prenant $q<x$; car puiſqu' on peut augmenter le nombre n à volonté, on peut toujours faire $\frac{m-1}{n}<\frac{1-\frac{q}{x}}{\frac{q}{x}}$; donc on peut auſſi faire $(\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}<1-\frac{q}{x}$, ou $(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}<1$; et comme dans les termes ſuivans la fraction $\frac{m-1}{n}$ devient $\frac{m-1}{n+1}$, $\frac{m-1}{n+2}$, $\frac{m-1}{n+3}$ et ainſi de ſuite, c'eſt-à-dire qu' elle diminue toujours; la quantité $(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}$, devenant une fois plus petite que 1, reſtera pour toujours plus petite que 1.

Soit la quantité q négative, notre série deviendra

$$(x-q)^{-m}=x^{-m}+mx^{-m-1}q+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\cdot x^{-m-2}q^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{-m-3}q^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)}x^{-m-(n-1)}q^{n-1}+Rq^n,$$

où tous les termes ont le même ſigne poſitif; donc pour que le dernier terme ſoit toujours plus grand que la ſomme de tous les termes qui le ſuivent, on trouvera que le terme

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots\ldots(n+m-2)(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)\cdot n}x^{-m-n}q^n$$

pris deux fois, doit être plus petit que le terme

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)}x^{-m-(n-1)}q^{n-1},$$ et que par

par conséquent la quantité $(\frac{n+m-1}{n})\frac{q}{x}$, ou $(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}$, doit être $< \frac{1}{2}$; à quoi on peut toujours satisfaire, en prenant $q < \frac{1}{2}x$; car parcequ'on peut toujours faire $\frac{m-1}{n} < \frac{\frac{1}{2}-\frac{q}{x}}{\frac{q}{x}}$, on aura $\frac{m-1}{n}.\frac{q}{x} < \frac{1}{2}-\frac{q}{x}$, ou $(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x} < \frac{1}{2}$.

Dans l'un et dans l'autre cas désignons par A le dernier terme de notre série, et les termes suivans par B, C, D et ainsi de suite; on aura $A:B = 1:(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}$, $B:C = 1:(1+\frac{m-1}{n+1})\frac{q}{x}$, $C:D = 1:(1+\frac{m-1}{n+2})\frac{q}{x}$, et ainsi de suite; d'où l'on tire $B = A(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}$, $C = B(1+\frac{m-1}{n+1})\frac{q}{x} = A(1+\frac{m-1}{n})(1+\frac{m-1}{n+1})(\frac{q}{x})^2$, $D = C(1+\frac{m-1}{n+2})\frac{q}{x} = A(1+\frac{m-1}{n})(1+\frac{m-1}{n+1})(1+\frac{m+1}{n+2})(\frac{q}{x})^3$, et ainsi de suite jusqu' au terme du rang $n+z$, que nous désignerons par N et qui sera =

$$A\left(1+\frac{m-1}{n}\right)\left(1+\frac{m-1}{n+1}\right)\left(1+\frac{m-1}{n+2}\right).....\left(1+\frac{m-1}{n+z-1}\right)\left(\frac{q}{x}\right)^z;$$

or comme chacun des facteurs $1+\frac{m-1}{n+1}$, $1+\frac{m-1}{n+2}$, $1+\frac{m-1}{n+z-1}$ est moindre que le premier $1+\frac{m-1}{n}$, il est clair que le terme N sera moindre que la quantité $A\left(1+\frac{m-1}{n}\right)\left(\frac{q}{x}\right)^z$ ou $A\left(\left(1+\frac{m-1}{n}\right)\frac{q}{x}\right)^z$, laquelle, par l'augmentation du nombre z, peut devenir plus petite que toute quantité δ arbitrairement donnée; car à cause que $(1+\frac{m-1}{n})\frac{q}{x}$ est

une

une quantité plus petite que 1, $\left(\left(1+\frac{m-1}{n}\right)\frac{q}{x}\right)^z$ peut devenir plus petit que $\frac{A}{\delta}$; par conséquent, à plus forte raison, le terme N peut devenir plus petit que toute quantité arbitrairement donnée. Et puisque le reste $R_1 q^{n+z}$, dans le cas de $q < x$ ou de $q < \frac{1}{2}x$, est toujours plus petit que son dernier terme N, ce reste, par l'augmentation du nombre des termes, peut devenir, à plus forte raison, plus petit que toute quantité atbitrairement donnée, et la valeur contenue dans la série

$$x^{-m} \mp m x^{-m-1} q + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2} x^{-m-2} q^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{-m-3} q^3 + \&c.$$

dans le cas de $q < x$ ou $q < \frac{1}{2}x$, n'est autre que variable, ayant pour limite la fonction $(x \pm q)^{-m}$.

Remarque

Nous avons supposé ici que $m > 1$; mais dira-t'on, si $m < 1$, la quantité $\left(1+\frac{m-1}{n}\right)\frac{q}{x}$, devenant moindre que 1 ou $\frac{1}{2}$, ne restera pas toujours plus petite que 1 ou $\frac{1}{2}$, puisque alors le facteur $\left(1+\frac{m-1}{n}\right)$ deviendra $\left(1-\frac{1-m}{n}\right)$, et que ses semblables dans les termes suivans deviendront $1-\frac{1-m}{n+1}$, $1-\frac{1-m}{n+2}$, et ainsi de suite, c'est-à-dire, qu'ils augmenteront. Mais néanmoins la quantité $\left(1-\frac{1-m}{n}\right)\frac{q}{x}$, devenant moindre que 1 ou $\frac{1}{2}$, restera pour toujours moindre que 1 ou $\frac{1}{2}$; car pour qu'elle devienne < 1 ou $\frac{1}{2}$, il faudroit auparavant que $\frac{1-m}{n}$ fut $< \frac{1-\frac{q}{x}}{\frac{q}{x}}$ ou $\frac{\frac{1}{2}-\frac{q}{x}}{\frac{q}{x}}$, pour avoir

$(1+\frac{1-m}{n})\frac{q}{x} < 1$ ou $< \frac{1}{2}$; et alors, à cauſe de $(1-\frac{1-m}{n})\frac{q}{x} < (1+\frac{1-m}{n})\frac{q}{x}$, la quantité $(1-\frac{1-m}{n})\frac{q}{x}$ reſtera toujours moindre que 1 ou $\frac{1}{2}$, quelque grand que ſoit le nombre n.

De même pour ſe convaincre que dans ce cas le dernier terme

$$A(1-\tfrac{1-m}{u})(1-\tfrac{1-m}{n+1})(1-\tfrac{1-m}{n+2})\ldots(1-\tfrac{1-m}{n+x-1})\left(\frac{q}{x}\right)^z,$$

par l'augmentation du nombre des termes, pourra devenir plus petit que toute quantité arbitrairement donnée, il ſuffit de remarquer qu'il eſt plus petit que

$A\left(1+\frac{1-m}{n}\right)^z\left(\frac{q}{x}\right)^z$, et de démontrer que la quantité

$A\left((1+\frac{1-m}{n})\frac{q}{x}\right)^z$ pourra devenir plus petite que toute quantité arbitrairement donnée; ce qui, à cauſe de $(1+\frac{1-m}{n})\frac{q}{x} < 1$, pourra ſe faire ſans peine.

Enfin j'appliquerai le théoreme de Taylor à un problème particulier qui concerne la méthode inverſe des tangentes, et qui peut avoir ſon uſage dans la Mécanique.

Problème.

Tab. I. Fig. 6. Ayant pris ſur l'axe des abſciſſes A Q d'une courbe LN des différences égales PP′, P′P″ &c, et ayant tiré des extrémités M, M′ &c des ordonnées correspondantes PM, P′M′, &c, les tangentes MS, M′S′, &c, à la courbe; on demande

mande toutes les courbes, dans lesquelles les parties M′S, M″S, &c. de ces ordonnées, comprises entre les courbes et les tangentes, soient égales entr'elles.

Solution.

Supposons l'abscisse AP $= x$, l'ordonnée PM $= y$, la différence PP′ ($= P'P'' =$ &c.) $= q$, l'ordonnée P′M′ $= Y$ et la partie M′S ($= M''S' =$ &c.) $= p$; on aura par le théorème de Taylor :

$$Y = y + q \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots$$
$$\ldots \ldots \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (n-1)} \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + q^n R.$$

D'où à cause de $\frac{SR}{MR} = \frac{\partial y}{\partial x}$, $SR = q \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, & $p = M'S =$ $P'M' - PM - SR = Y - y - q \frac{\partial y}{\partial x}$, il viendra

$$p = \frac{q^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \frac{q^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} \cdot \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + q^n R.$$

De même, en désignant par X l'abscisse AP′ $= x + q$, on trouvera

$$p = \frac{q^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 Y}{\partial X^3} + \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + \ldots \ldots$$
$$\ldots + \frac{q^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)} \cdot \frac{\partial^{n-1} Y}{\partial X^{n-1}} + q^n R'.$$

D'où l'on formera l'équation identique

$$\frac{q^2}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial X^3} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right) + \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} - \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \frac{q^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \ldots (n-1)} \left(\frac{\partial^{n-1} Y}{\partial X^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \right) + q^n (R' - R) = 0,$$

qui, à cauſe que dans le théorème de Taylor on ſuppoſe la différence Δx conſtante, et que $Y = y + q \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + p$, ſe changera en celle-ci :

$$\frac{q^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2\left(y + q\frac{\partial y}{\partial x} + p\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$
$$+ \frac{q^3}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3\left(y + q\frac{\partial y}{\partial x} + p\right)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)$$
$$+ \frac{q^4}{1.3.3.4}\left(\frac{\partial^4\left(y + q\frac{\partial y}{\partial x} + p\right)}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{q^{n-1}}{1.2.3.4\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial^{n-1}\left(y + q\frac{\partial y}{\partial x} + p\right)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)$$
$$+ q^n(R' - R) = 0,$$ ou encore en celle-ci

$$\frac{q^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q^5}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{q^n}{1.2.3.4\ldots(n-1)}\cdot\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + q^n S = 0,$$

où S eſt une certaine fonction de q et x, qui ne contient pas la quantité p ; car, quand R eſt la limite de la quantité

$$\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n} - a\frac{1}{mn} + b\left(\frac{1}{mn}\right)^2 - \ldots\ldots \mp r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-1}\right)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$
$$+ q\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} - a'\frac{1}{mn} + b'\left(\frac{1}{mn}\right)^2 - \ldots \mp r'\left(\frac{1}{mn}\right)^n\right)\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ q^n\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)\ldots 2n} - a_1\frac{1}{mn} + b_1\left(\frac{1}{mn}\right)^2 - \ldots \mp r_1\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n-1}\right)\frac{\Delta^{2n} y}{\Delta x^{2n}}$$

$$+q^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2n+1)}-a2\frac{1}{mn}+b2\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r2\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n}\right)\frac{\Delta^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^{n(m-1)}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2n+1)\ldots mn}-\alpha\frac{1}{mn}+\beta\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\rho\left(\frac{1}{mn}\right)^{mn-1}\right)\frac{\Delta^{mn}y}{\Delta x^{mn}}.$$

et que R′ eſt la limite de la quantité

$$\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}-a\frac{1}{mn}+b\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-1}\right)\frac{\Delta^n(y+q\frac{\partial y}{\partial x}+p)}{\Delta x^n}$$

$$+q\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)}-a'\frac{1}{mn}+b'\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r'\left(\frac{1}{mn}\right)^{n}\right)\frac{\Delta^{n+1}(y+q\frac{\partial y}{\partial x}+p)}{\Delta x^{n+1}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^{n}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)\ldots 2n}-a1\frac{1}{mn}+b1\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r1\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n-1}\right)\frac{\Delta^{2n}(y+q\frac{\partial y}{\partial x}+p)}{\Delta x^{2n}}$$

$$+q^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2n+1)}-a2\frac{1}{mn}+b2\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r2\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n}\right)\frac{\Delta^{2n+1}(y+q\frac{\partial y}{\partial x}+p)}{\Delta x^{2n+1}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^{n(m-1)}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2n+1)\ldots mn}-\alpha\frac{1}{mn}+\beta\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right.$$

$$\left.-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mp\rho\left(\frac{1}{mn}\right)^{mn-1}\right)\frac{\Delta^{mn}(y+q\frac{\partial y}{\partial x}+p)}{\Delta x^{mn}},$$

la quantité S étant égale à R′ — R, ſera la limite de la grandeur ſuivante :

$$\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}-a\frac{1}{mn}+b\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\ldots\mp r\left(\frac{1}{mn}\right)^{n-1}\right)\frac{\Delta^n(q\frac{\partial y}{\partial x})}{\Delta x^n}$$

$$+q\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)}-a'\frac{1}{mn}+b'\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\mp r'\left(\frac{1}{mn}\right)^{n}\right)\frac{\Delta^{n+1}(q\frac{\partial y}{\partial x})}{\Delta x^{n+1}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+q^n$$

$$+q^n\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots 2n}-a_1\frac{1}{mn}+b_1\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\mp r_1\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n-1}\right)\frac{\Delta^{2n}\left(q\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x^{2n}}$$
$$+q^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2n+1)}-a_2\frac{1}{mn}+b_2\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\mp r_2\left(\frac{1}{mn}\right)^{2n}\right)\frac{\Delta^{2n+1}\left(q\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x^{n+1}}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q^{n(m-1)}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots 2n(2+1)\ldots mn}-\alpha\frac{1}{mn}+\beta\left(\frac{1}{mn}\right)^2-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\mp\varsigma\left(\frac{1}{mn}\right)^{mn-1}\right)\frac{\Delta^{mn}\left(q\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x^{mn}};$$

et comme cette grandeur ne renferme point la quantité p, la limite S auſſi ne doit pas contenir p, donc &c. Ainſi, puiſque l'équation $\frac{q^3}{1\cdot 2}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{q^4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{q^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}+\ldots$
$\ldots+\frac{q^{q^n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\cdot\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+q^n S=0$, ne contient pas p, elle doit avoir lieu quelle que ſoit la valeur de q, ce qui rend nulle chacune des quantités $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, &c. Car ſi ces quantités n'étoient pas nulles, la quantité q devroit être déterminée, puiſque S eſt une telle fonction de q qu'elle ne change point de forme, quelque ſoit le changement de la valeur de q.

Ainſi $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=0$ et ainſi de ſuite; donc auſſi $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=0$, $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}=0$, $\frac{\Delta^5 y}{\Delta x^5}=0$ et ainſi de ſuite; ou ce qui eſt la même choſe, $\Delta^3 y=0$, $\Delta^4 y=0$, $\Delta^5 y=0$

et

et ainsi de suite; d'où il suit qu'ici les secondes différences sont constantes et que la courbe en question appartient au premier cas du théorème de *Taylor;* et comme dans ce cas le reste $q\,\mathrm{R} = 0$, l'équation trouvée ci-dessus

$$p = \frac{q^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,.\,(n-1)}\cdot\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + q^n \mathrm{R}$$

deviendra

$$p = \frac{q^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ ou } \partial^2 y = \frac{2p}{q^2}\partial x^2.$$

D'où en intégrant on aura

$$\partial y = \frac{2p}{q^2} x\partial x + \mathrm{C}\partial x,$$

en intégrant encore une fois, il viendra

$$\mathrm{Y} = \frac{px^2}{q} + \mathrm{C}x + \mathrm{C}';$$

ce qui est l'équation de la parabole d'*Apollonius.*

Ainsi les courbes cherchées se réduisent à présent à une seule parabole qui réellement a la proprieté préscrite dans le problème, c'est de quoi chacun pourra se convaincre à l'aide de la Géometrie la plus simple.

NATURAL HISTORY